LIMITES DE SUITES

Ce cours est un complément des propriétés vues en 1èreS qu'il est préférable d'avoir relues !

1) LIMITE DU TYPE : $u_n = f(v_n)$

Propriété

Soit une fonction f définie sur intervalle I et (v_n) une suite dont tous les termes appartiennent à I . Les lettres b et c désignent soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = b$ et si $\lim\limits_{x \to b} f(x) = c$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(v_n) = c$

L'idée de la démonstration est analogue à celle sur la limite de la composée de deux fonctions.

Exemple :

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \sqrt{4 + \frac{1}{n^2}}$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$

Pour tout $n \in$ IN, on a $v_n = \sqrt{u_n}$ avec $u_n = 4 + \frac{1}{n^2}$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$ et $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x} = 2$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 2$

2) CONVERGENCE DE SUITES MONOTONES

Propriété

Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.
Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.

Preuve :

Soit (u_n) une suite croissante non majorée . Soit A un réel strictement positif.
La suite (u_n) n'est pas majorée, il existe donc un entier n_0 tel que $u_{no} > A$.
Or la suite (u_n) est croissante . Ainsi pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n \geq u_{no} > A$.
Ainsi pour tout $n \geq n_0$, $u_n \in] A ; +\infty [$.
Tout intervalle de la forme $] A ; +\infty [$ contient donc tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, et par conséquent $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

On démontre d'une façon similaire qu'une suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.

Remarques :

Une suite non majorée n'a pas nécessairement pour limite $+\infty$. Une telle suite a des termes aussi grands que l'on veut puisqu'elle n'est pas majorée, mais elle n'a pas nécessairement ses termes aussi grands que l'on veut à partir d'un certain rang.
On peut citer comme exemple la suite (u_n) définie par $u_n = ((-1)^n + 1) n$

Propriété (admise)

Toute suite croissante majorée est convergente.
Toute suite décroissante minorée est convergente.

Remarque :

- La propriété permet de justifier qu'une suite est convergente, mais elle ne permet pas de donner la limite.
- D'après les propriétés vues sur les limites, si une suite est majorée par M, sa limite, si elle existe, est nécessairement inférieure ou égale à M.
- Lorsqu'une suite définie par récurrence est convergente, la relation de récurrence permet de déterminer une relation vérifiée par la limite.

Exemple :

Soit une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = 3 u_n + 5$.
Si (u_n) est convergente, alors sa limite L vérifie la relation :

$$L = 3 L + 5 \quad \Leftrightarrow \quad L = -\frac{5}{2}$$

Attention : Cette relation ne permet en aucun cas d'affirmer que cette suite est convergente.
Si $u_0 = -\frac{5}{2}$, la suite est convergente (c'est une suite constante) et si $u_0 \neq -\frac{5}{2}$ la suite n'est pas convergente (elle a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$)

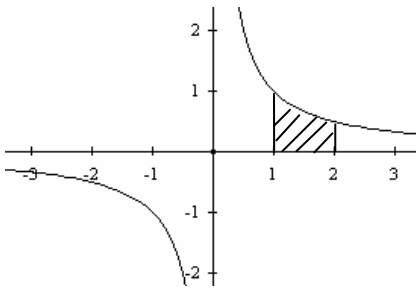
3) SUITES ADJACENTES

Partie préliminaire :

Soit la fonction inverse $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ et C sa courbe représentative.

On voudrait trouver une valeur approchée de l'aire comprise entre C , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$

On découpe l'intervalle $[1 ; 2]$ en n intervalles de même amplitude.



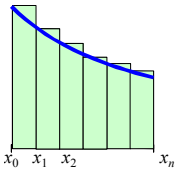
Donner les valeurs x_0 , x_1 , x_2 , ... , x_i , ... , x_n des bornes des intervalles.

$x_0 = 1$ $\quad x_1 = 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$ $\quad x_2 = 1 + \frac{2}{n} = \frac{n+2}{n}$ $\quad x_i = 1 + \frac{i}{n} = \frac{n+i}{n}$ $\quad x_n = 2$

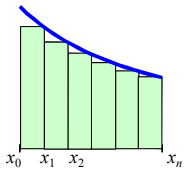
Déterminer les valeurs de $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, ... , $f(x_i)$, ... , $f(x_n)$.

$f(x_0) = 1$ $\quad f(x_1) = \frac{n}{n+1}$ $\quad f(x_2) = \frac{n}{n+2}$ $\quad f(x_i) = \frac{n}{n+i}$ $\quad f(x_n) = \frac{1}{2}$

dessin 1



dessin 2



En considérant les aires des n rectangles dont l'un des sommets est sur la courbe C déduire en fonction de n l'expression des aires u_n et v_n coloriées respectivement sur chacun des dessins ci-dessous.

dessin 1 :

$$v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n+i}$$

dessin 2 :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}$$

On définit ainsi deux suites (u_n) et (v_n).

- Déterminer le sens de variation des suites (u_n) et (v_n).
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{2}{2n+2} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$
  $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} < 0$
  On en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante et que la suite (v_n) est strictement décroissante.

- Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n)$
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n - u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}$
  On en déduit que : $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$

- Quelle conjecture peut-on faire pour le suites (u_n) et (v_n) ?
  Les deux suites semblent être convergentes et semblent converger vers la même limite.

- En utilisant une calculatrice ou un ordinateur, donner une valeur approchée à 10^{-3} près de u_{50} et v_{50} puis de u_{1000} et v_{1000}
  $u_{50} \approx 0{,}688$ $\quad v_{50} \approx 0{,}698$ $\quad u_{1000} \approx 0{,}693$ $\quad v_{1000} \approx 0{,}693$

Définition

On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** lorsque :
(u_n) est une suite croissante , (v_n) est une suite décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$

Propriété

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, alors elles sont convergentes et elles ont la même limite.

Preuve :

Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq u_n$.
Soit un entier n quelconque.
La suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante, pour tout $p \geq n$, on a donc : $v_p \leq v_n$ et $u_p \geq u_n$, donc $-u_p \leq -u_n$
Ainsi pour tout $p \geq n$, $v_p - u_p \leq v_n - u_n$.
On en déduit que $\lim\limits_{p \to +\infty} (v_p - u_p) \leq v_n - u_n$
Or $\lim\limits_{p \to +\infty} (v_p - u_p) = 0$, donc $0 \leq v_n - u_n$
Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq u_n$

La suite (u_n) est croissante, pour tout entier n, on a donc $u_n \geq u_0$. On en déduit que pour tout entier n, $v_n \geq u_n \geq u_0$
La suite (v_n) est donc décroissante et minorée par u_0. On en déduit que (v_n) est une suite convergente.

La suite (v_n) est décroissante, pour tout entier n, on a donc $v_n \leq v_0$. On en déduit que pour tout entier n, $u_n \leq v_n \leq v_0$
La suite (u_n) est donc croissante et majorée par v_0 . On en déduit que (u_n) est une suite convergente.

Posons $L = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et $L' = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$
On a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = L' - L$
Or $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$. On en déduit que $L = L'$

Les suites (u_n) et (v_n) sont donc convergentes et elles ont la même limite.