PRODUIT SCALAIRE

1) DEFINITION

Les définitions et propriétés vectorielles concernant le produit scalaire sont valables dans le plan et dans l'espace.
Les démonstrations dans le plan et dans l'espace étant souvent très similaires et la plupart des résultats ayant été vus en classe de Première, ils sont rappelés et étendus à l'espace sans démonstration.

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan ou de l'espace . **Le produit scalaire** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\left\| \vec{u} + \vec{v} \right\|^2 - \left\| \vec{u} \right\|^2 - \left\| \vec{v} \right\|^2 \right)$$

Remarque :
Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan ou de l'espace, le produit scalaire de $\vec{u}$ par lui même, $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est appelé **carré scalaire** de $\vec{u}$.
On le note $\vec{u}^2$. On a :

$$\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \left\| \vec{u} \right\| \times \left\| \vec{u} \right\| = \left\| \vec{u} \right\|^2$$

Ce qui donne, pour deux points A et B :
$\overrightarrow{AB}^2 = \left\| \overrightarrow{AB} \right\|^2 = AB^2$

2) ORTHOGONALITE

Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan ou de l'espace . On a :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Remarque :
Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan ou de l'espace, $\vec{0} \cdot \vec{u} = 0$. Le vecteur nul est donc orthogonal à tout vecteur du plan ou de l'espace.

3) EXPRESSION DU PRODUIT SCALAIRE DANS UNE BASE ORTHONORMALE

Propriétés

- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan de coordonnées respectives $(x ; y)$ et $(x' ; y')$ dans une base orthonormale quelconque . On a :
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y'$$
- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace de coordonnées respectives $(x ; y ; z)$ et $(x' ; y' ; z')$ dans une base orthonormale quelconque . On a :
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y' + z z'$$

Preuve :
Immédiat en utilisant la définition

4) AUTRES EXPRESSIONS DU PRODUIT SCALAIRE

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont nécessairement coplanaires, c'est à dire qu'il existe A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et (au moins) un plan P contenant A, B et C . La définition du produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans l'espace coïncide avec celle du produit scalaire de ces mêmes vecteurs dans le plan P. On en déduit que les expressions du produit scalaire établies dans le plan sont encore valables dans l'espace.

A) Produit scalaire et cosinus

Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan ou de l'espace et α la mesure de l'angle géométrique associé à $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left\| \vec{u} \right\| \left\| \vec{v} \right\| \cos \alpha$$

Remarques :

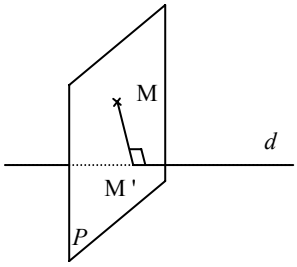
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \left\| \vec{u} \right\| \left\| \vec{v} \right\|$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\left\| \vec{u} \right\| \left\| \vec{v} \right\|$

B) Produit scalaire et projection

La notion de projection orthogonale sur un plan est déjà connue.

Définition

Soit d une droite de l'espace . **La projection orthogonale sur la droite *d*** est l'application qui associe à tout point M de l'espace le point M' intersection de la droite d et du plan P perpendiculaire à d et passant par M.
M' est appelé projeté orthogonal de M sur d.



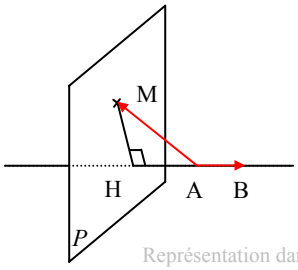
Remarques :

- Si M appartient à la droite d , M est invariant par la projection orthogonale sur d .
- Si M n'appartient pas à la droite d , la droite d est orthogonale à la droite (MM') qui est incluse dans le plan P .
- MM' est **la distance** de M à la droite d .

Propriété

Soit A, B et M trois points du plan ou de l'espace tels que A et B sont distincts.
Si on note H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB), alors on a :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$$

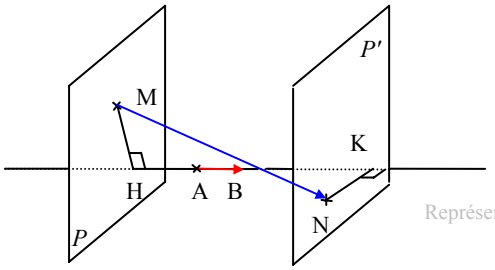


Représentation dans l'espace

Remarques :

- Dans l'espace, on peut aussi remplacer $\overrightarrow{AM}$, par son projeté orthogonal sur un plan qui contient (AB).
- Si M et N sont des points du plan ou de l'espace, et H et K leurs projetés orthogonaux respectifs sur la droite (AB) , alors on a :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HK}$$



Représentation dans l'espace

5) REGLES DE CALCUL

Propriétés

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan ou de l'espace et k un réel, on a :

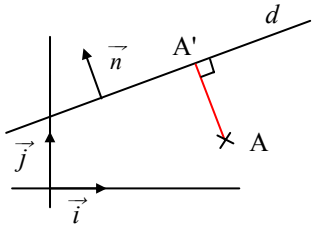
- Symétrie : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- Linéarité : $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
  $(k\,\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})$

Preuve :
Immédiat en munissant l'espace d'un repère orthonormé

6) DISTANCE D'UN POINT A UNE DROITE DANS UN REPERE ORTHONORMAL DU PLAN

Propriété

Dans un repère orthonormal, la distance du point A de coordonnées (α ; β) à la droite d d'équation $a\,x + b\,y + c = 0$ est égale à $\dfrac{|a\,\alpha + b\,\beta + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$



Preuve :
Le vecteur $\vec{n}$ (a ; b) est un vecteur normal à la droite d , donc $\vec{n} \neq \vec{0}$.
Soit A' (α'; β') le projeté orthogonal du point A sur d . (la distance cherchée est AA')
$\overrightarrow{AA'}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires . On a donc :
$|\vec{n}.\overrightarrow{AA'}| = \|\vec{n}\| \times AA' = \sqrt{a^2+b^2} \times AA'$ [1]
On a $\overrightarrow{AA'}$ (α' - α ; β' - β) . On en déduit que $|\vec{n}.\overrightarrow{AA'}| = |a(\alpha' - \alpha) + b(\beta' - \beta)| = |a\,\alpha' + b\,\beta' - a\,\alpha - b\,\beta|$.
Or A'∈ d , donc $a\,\alpha' + b\,\beta' + c = 0$. On a alors :
$|\vec{n}.\overrightarrow{AA'}| = |-c - a\,\alpha - b\,\beta| = |a\,\alpha + b\,\beta + c|$ [2]
Les égalités [1] et [2] donnent $AA' = \dfrac{|a\,\alpha + b\,\beta + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

7) EQUATIONS DE PLANS

Définition

Un vecteur normal à un plan P est un vecteur non nul $\vec{n}$ dont la direction est orthogonale au plan P.

Si deux vecteurs sont des vecteurs normaux à un même plan P, alors ils sont colinéaires.

Remarque :
Soit d une droite, $\vec{n}$ un vecteur directeur de d et A un point de d . Le plan P perpendiculaire à la droite d en A est l'ensemble des points M tels que la droite (AM) est perpendiculaire à d . (auquel on adjoint le point A)
P est donc l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{n}$. Le vecteur $\vec{n}$ est donc normal à P.

Propriété

Le plan qui passe par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$$

Propriété

Dans un repère orthonormal :

- Tout plan admet une équation du type $a\,x + b\,y + cz + d = 0$ où l'un au moins des réels a, b et c est non nul et d est un réel quelconque. De plus, le vecteur non nul $\vec{n}$ (a ; b ; c) est normal à P.
- Réciproquement :

Soit a, b, c et d des réels tels que l'un au moins des réels a, b et c n'est pas nul.
L'ensemble des points M (x ; y ; z) de l'espace tels que $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}$ (a ; b ; c).

Si a , b et c sont nuls simultanément, deux cas se présentent :
- $d = 0$, et alors la relation $a\,x + b\,y + cz + d = 0$ est toujours vérifiée
- $d \neq 0$, et alors la relation $a\,x + b\,y + cz + d = 0$ n'est jamais vérifiée

Preuve :

- Soit P un plan, $\vec{n}$ (a ; b ; c) un vecteur normal à P et A (x_A ; y_A ; z_A) un point de P.

Soit M (x ; y ; z) un point de l'espace.
On a $\overrightarrow{AM}$ ($x - x_A$; $y - y_A$; $z - z_A$) .

$$M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow a\,(x - x_A) + b\,(y - y_A) + c\,(z - z_A) = 0 \Leftrightarrow a\,x + b\,y + c\,z - a\,x_A - b\,y_A - c\,z_A = 0$$

En posant $d = - a\,x_A - b\,y_A - c\,z_A$, on obtient :

$$M \in P \Leftrightarrow a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$$

- Réciproquement :

Soit a, b, c et d des réels tels que l'un au moins des réels a, b et c n'est pas nul.
On considère l'ensemble E des points M (x ; y ; z) de l'espace tels que $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ et non note $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées (a ; b ; c).
On considère, par exemple, que $a \neq 0$. Le point A $\left(-\frac{d}{a} ; 0 ; 0 \right)$ est un point de E .

Pour tout point M (x ; y ; z) de l'espace, on a $\overrightarrow{AM}$ $\left(x + \frac{d}{a} ; y ; z \right)$.

Ainsi $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a\,x + b\,y + c\,z + d$
L'ensemble E est donc l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, c'est à dire la plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Remarques :

- Un plan admet une infinité d'équations.

Si $a\,x + b\,y + cz + d = 0$ est l'équation d'un plan, alors $k\,(a\,x + b\,y + cz + d\,) = 0$, où $k \in \mathbb{R}^*$, est aussi une équation de ce plan.

Les équations $\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{5}{3}z - 4 = 0$ et $2\,x - y + 5\,z - 12 = 0$ sont deux équations du même plan.

- Si $d \neq 0$, le plan ne passe pas par l'origine du repère.

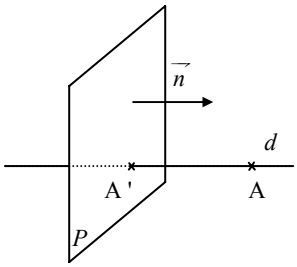
On peut alors toujours choisir une équation de la forme $a'\,x + b'\,y + c'\,z + 1 = 0$

- Lorsque P est un plan parallèle à l'un des plan de coordonnées, il admet comme vecteur normal l'un des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ ou $\vec{k}$, et on a alors :
  - tout plan parallèle au plan (xOy) admet une équation du type $z = k$
  - tout plan parallèle au plan (yOz) admet une équation du type $x = k$
  - tout plan parallèle au plan (xOz) admet une équation du type $y = k$

8) DISTANCE D'UN POINT A UN PLAN DANS UN REPERE ORTHONORMAL DE L'ESPACE

Propriété

Dans un repère orthonormal, la distance du point A de coordonnées (α ; β ; γ) au plan P d'équation $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ est égale à $\dfrac{|\,a\,\alpha + b\,\beta + c\,\gamma + d\,|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$



Preuve :

Le vecteur $\vec{n}$ (a ; b ; c) est un vecteur normal au plan P , donc $\vec{n} \neq \vec{0}$.
Soit A' (α'; β' ; γ') le projeté orthogonal du point A sur le plan P . (la distance cherchée est AA')
$\overrightarrow{AA'}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires . On a donc :

$|\,\vec{n} \cdot \overrightarrow{AA'}\,| = \|\,\vec{n}\,\| \times AA' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \times AA'$ [1]

On a $\overrightarrow{AA'}$ ($\alpha' - \alpha$; $\beta' - \beta$; $\gamma' - \gamma$). On en déduit que $|\,\vec{n} \cdot \overrightarrow{AA'}\,| = |\,a\,(\alpha' - \alpha\,) + b\,(\beta' - \beta\,) + c\,(\gamma' - \gamma\,)\,| = |\,a\,\alpha' + b\,\beta' + c\,\gamma' - a\,\alpha - b\,\beta - c\,\gamma\,|$.

Or A' $\in P$, donc $a\,\alpha' + b\,\beta' + c\,\gamma' + d = 0$. On a alors :

$|\,\vec{n} \cdot \overrightarrow{AA'}\,| = |\,- d - a\,\alpha - b\,\beta - c\,\gamma\,| = |\,a\,\alpha + b\,\beta + c\,\gamma + d\,|$ [2]

Les égalités [1] et [2] donnent $AA' = \dfrac{|\,a\,\alpha + b\,\beta + c\,\gamma + d\,|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$