LOIS DE PROBABILITE

1) LOI DE PROBABILITE DISCRETE

Dans toutes les situations étudiées jusqu'à présent, la variable aléatoire X prend un nombre fini de valeurs . On dit que X est **discrète**.

A) LOI DE BERNOUILLI

Définition

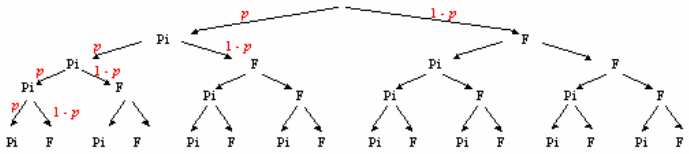
On appelle **épreuve de Bernoulli** une épreuve ayant deux éventualités :

l'éventualité S avec la probabilité p et l'éventualité $\overline{S}$ avec la probabilité $1 - p$.

L'éventualité S correspondra souvent au "succès" d'une expérience, $\overline{S}$ étant alors "l'échec".

Exemple :

On jette une pièce de monnaie.
Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli, les deux éventualités sont Pi : "Pile" et F : "Face".
Notons $P(Pi) = p$ et $P(F) = 1 - p$
(si la pièce est équilibrée, on a $P(Pi) = P(F) = \frac{1}{2}$).



On répète quatre fois, de façon indépendante, le jet de cette pièce . On peut traduire la situation par un arbre pondéré.

La probabilité d'obtenir la suite (Pi ; Pi ; F ; Pi) est $p \times p \times (1 - p) \times p = p^3 (1 - p)$
La probabilité d'obtenir trois fois Pile sur les quatre lancers est la probabilité de l'événement :
{(Pi ; Pi ; Pi ; F) ; (Pi ; Pi ; F ; Pi) ; (Pi ; F ; Pi ; Pi) ; (F ; Pi ; Pi ; Pi)}. Elle est égale à $4 \times p^3 (1 - p)$
Le nombre 4 correspond au nombre de choix des positions des trois Pi dans la séquence de quatre (ou, ce qui est identique, au nombre de choix de la position du F dans la séquence de quatre), c'est-à-dire $\binom{4}{3}$
Notons X la variable aléatoire égale au nombre de "Pile" obtenus sur les quatre lancers.
On a $X(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}$ et on a justifié que $P(X=3) = \binom{4}{3} p^3 (1 - p)$
La loi de probabilité de X est alors donnée par :

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	$\binom{4}{0} p^0 (1 - p)^4$	$\binom{4}{1} p^1 (1 - p)^3$	$\binom{4}{2} p^2 (1 - p)^2$	$\binom{4}{3} p^3 (1 - p)$	$\binom{4}{4} p^4 (1 - p)^0$

Définition

On appelle **schéma (ou expérience) de Bernoulli**, la répétition n fois, de manière indépendante, d'une épreuve de Bernoulli.

B) LOI BINOMIALE

Propriété

On considère un schéma de Bernoulli consistant en la répétition n fois d'une épreuve de Bernoulli pour laquelle la probabilité du succès S est p.
Si on note X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus sur les n répétitions, la loi de probabilité de X est donnée par :
pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq n$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

Définition

On dit que la loi de probabilité d'une variable aléatoire X est une **loi binomiale de paramètres *n* et *p*** lorsque :
- l'ensemble de ses valeurs est { 0 ; 1 ; ... ; n }
- pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq n$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

Cette loi est parfois notée B(n;p)

Propriété (admise)

La loi binomiale de paramètres n et p a pour espérance mathématique $E(X) = np$ et pour variance $V(X) = np(1 - p)$

2) LOI DE PROBABILITE CONTINUE (OU A DENSITE) : GENERALITES

Il existe des variables aléatoires non discrètes, qui prennent toutes les valeurs d'un intervalle de $\mathbb{R}$ (borné ou non).

Exemples : Le temps d'attente à un arrêt de bus ; la durée de vie d'un transistor ; la distance du point d'impact au centre d'une cible……

On s'intéresse alors à des événements du type : " X prend ses valeurs dans l'intervalle I " . On note ($X \in I$) .
Si I = [a ; b], on note ($a \leq X \leq b$) , si I = [a ; $+\infty$ [, on note ($X \geq a$) ...

Définition

On dit qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une **densité de probabilité** si, et seulement si,

- f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en quelques points.
- f est positive
- $\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = 1$ (l'aire sous la courbe de f est égale à 1).

Remarques :

- Si $I = [a\,;b]$, la notation $\int_I f(t)\,dt$ remplace la notation $\int_a^b f(t)\,dt$
- Si $I = [a\,;+\infty[$, la notation $\int_I f(t)\,dt$ désigne la limite en $+\infty$ (si elle existe) de la fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$

$$\int_I f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt$$ (idem en moins l'infini)

- Dire que $\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = 1$ pour une fonction de densité f, signifie que la fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$ a une limite L en $+\infty$, que la fonction $x \longmapsto \int_x^a f(t)\,dt$ a une limite L' en $-\infty$ et que $L + L' = 1$.

  Cette condition sur f prouve que toute fonction f ne peut pas être une fonction de densité.

  Lorsque f est une telle fonction $\int_I f(t)\,dt$ est bien définie que I soit borné ou non.

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X est continue (absolument continue ou à densité) s'il existe une fonction f densité de probabilité, telle que, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$:

$$P(X \in I) = \int_I f(t)\,dt$$

f est alors appelée densité de X.

Remarques :

- La probabilité de la réunion d'un nombre fini quelconque d'intervalles de I disjoints deux à deux est égale à la somme des probabilités de ces intervalles. (D'après les propriétés de l'intégrale)
  Ainsi si $J \subset I$, $K \subset I$ et $J \cap K = \varnothing$ alors $P(X \in J \cup K) = P(X \in J) + P(X \in K)$
- La probabilité que X prenne une valeur isolée de I est nulle. En effet, pour tout réel a de I :
  $$P(X = a) = P(X \in [a\,;a]) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$$
- On en déduit que pour tous réels a et b de I, avec $a < b$:
  $P(X \in [a\,;b]) = P(X \in [a\,;b[) = P(X \in]a\,;b]) = P(X \in]a\,;b[)$
  $P(X > a) = P(X \geq a)$, etc ...

3) EXEMPLES DE LOIS DE PROBABILITE CONTINUES

A) LOI UNIFORME

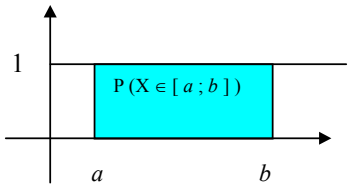
Définition

On appelle **loi uniforme sur [0 ; 1]**, la loi de probabilité dont la densité f vérifie :
- $f(x) = 1$, si $x \in [0\,;1]$
- $f(x) = 0$, si $x \notin [0\,;1]$

Propriété

Si P est la loi uniforme sur [0 ; 1] alors, pour tous réels a et b de [0 ; 1] tels que $a \leq b$:

$$P(X \in [a\,;b]) = \int_a^b 1\,dt = b - a$$



Remarque : Si I et J sont des sous-intervalles de [0 ; 1] de même amplitude alors P (I) = P (J)

Définition

On appelle **loi uniforme sur [α ; β]**, la loi de probabilité dont la densité f vérifie :
- $f(x) = \dfrac{1}{\beta - \alpha}$, si $x \in [\alpha\,;\beta]$
- $f(x) = 0$, si $x \notin [\alpha\,;\beta]$

Propriété

Si P est la loi uniforme sur [α ; β] alors, pour tous réels a et b de [a ; b], tels que $a \leq b$:

$$P(X \in [a\,;b]) = \frac{b-a}{\beta-\alpha}$$

Cette formule est à rapprocher de la formule : $\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$ vue dans les situations d'équiprobabilité en nombre fini.

B) LOI EXPONENTIELLE DE PARAMETRE λ

Définition

Soit λ un réel strictement positif.
On appelle **loi exponentielle de paramètre λ** la loi de probabilité dont la densité f vérifie :
- $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, si $x \geq 0$
- $f(x) = 0$, si $x < 0$

Propriété

Si P est la loi exponentielle de paramètre λ alors, pour tous réels positifs a et b tels que $a \leq b$:

$$P(X \in [a\,;b]) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t}\,dt = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

On a aussi :
$P(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\,dt = 1 - e^{-\lambda a}$
et donc $P(X > a) = e^{-\lambda a}$

Propriété

Pour tous réels positifs s et t, on a : $P(X > s+t \,/\, X > s) = P(X > t)$

On dit que la loi exponentielle est une loi de durée de vie sans vieillissement.

Preuve :

$$P(X > s+t \,/\, X > s) = \frac{P((X > s+t) \cap (X > s))}{P(X > s)}$$

Or, $(X > s+t) = (X \in]s+t\,;+\infty[)$, $(X > s) = (X \in]s\,;+\infty[)$ et $(X \in]s+t\,;+\infty[) \subset (X \in]s\,;+\infty[)$
Donc, $(X \in]s\,;+\infty[) \cap (X \in]s+t\,;+\infty[) = (X > s+t)$
D'autre part, $P(X > s+t) = e^{-\lambda(s+t)}$ et $P(X > s) = e^{-\lambda s}$
Ainsi, $P(X > s+t \,/\, X > s) = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X > t)$

Signification : Si par exemple X désigne la durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique, la probabilité qu'il fonctionne encore t années sachant qu'il a déjà fonctionné pendant s années est la même que la probabilité qu'il fonctionne pendant au moins t années après sa mise en service.

Remarque : Cette loi modélise le phénomène de "mort sans vieillissement", observé par exemple pour la désintégration radioactive.