INTEGRALES ET PRIMITIVES

On a vu dans le chapitre sur les limites de suites une méthode, en utilisant deux suites adjacentes, pour approximer l'aire comprise entre C *(représentaion de* $x \longmapsto \frac{1}{x}$) , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$. La limite obtenue, commune aux deux suites adjacentes, se note $\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt$.

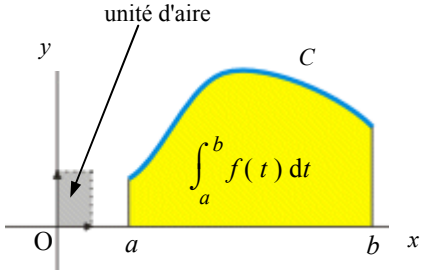
1) DEFINITION

A) Cas d'une fonction continue et positive

Définition

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; b] et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On appelle intégrale de a à b de la fonction f, et on note $\int_a^b f(t)\,dt$ le réel mesurant l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe C , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, c'est-à-dire l'ensemble des points M (x ; y) tels que $\begin{cases} a \le x \le b \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$



On appelle domaine D associé à une fonction f sur [a ; b] le domaine limité par la courbe C , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Remarques :

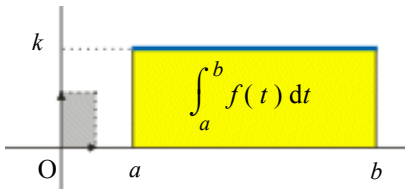
- On dit que a et b sont les bornes de l'intégrale.
- $\int_a^b f(t)\,dt$ se lit : " intégrale ou somme de a à b de $f(t)\,dt$ ".
- La variable t est appelée variable "muette".

  On peut remplacer t par n'importe quelle autre variable : $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(x)\,dx$
- L'unité d'aire est l'aire du rectangle défini par les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

  Si le repère a pour unités graphiques 2 cm sur l'axe (Ox) et 3 cm sur l'axe (Oy), alors l'unité d'aire est 6 cm^2.

Exemples :

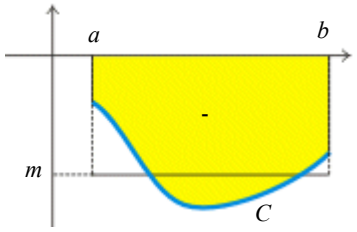
- Si $a = b$, alors $\int_a^b f(t)\,dt = 0$.
- Pour $k > 0$, $\int_a^b k\,dt = k(b - a)$. Le domaine D est un rectangle.



B) Cas d'une fonction continue et négative

Définition

Si f est une fonction continue et négative sur [a ; b], on appelle intégrale de a à b de la fonction f, et on note $\int_a^b f(t)\,dt$, l'opposé du nombre réel correspondant à l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe C , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

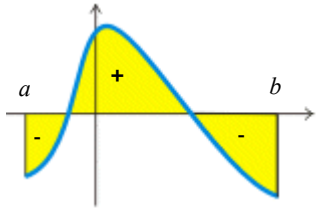


On dit parfois que $\int_a^b f(t)\,dt$ est l'aire algébrique du domaine pour indiquer qu'elle est positive si f est positive sur [a ; b], et négative si f est négative sur [a ; b].

C) Cas d'une fonction continue et changeant de signe

Définition

Si f est une fonction continue qui change de signe sur [a ; b], on appelle intégrale de a à b de la fonction f, et on note $\int_a^b f(t)\,dt$, la différence entre le nombre correspondant à l'aire obtenue lorsque f est positive et le nombre correspondant à l'aire obtenue lorsque f est négative.



2) EXTENSION ET PREMIERES PROPRIETES

A) Extension de la définition à *a* et *b* quelconques

Définition:

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , et a et b deux réels de I tels que $a > b$, on pose :

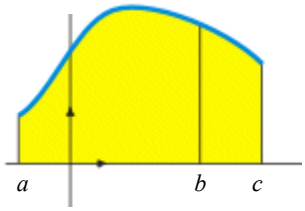
$$\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$$

B) Relation de Chasles

Propriété : admise

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Pour tous réels a , b et c de I , on a :

$$\int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt$$



Lorsque f est positive et $a \le b \le c$, la relation de Chasles traduit l'additivité des aires.

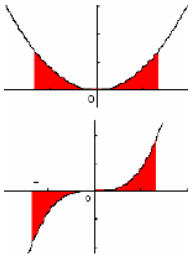
Conséquences pratiques :

- Si f est paire sur $[-a\,;a]$, alors :

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = \int_{-a}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(t)\,dt = \int_{0}^{a} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{a} f(t)\,dt$$

- Si f est impaire sur $[-a\,;a]$, alors :

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = \int_{-a}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(t)\,dt = -\int_{0}^{a} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(t)\,dt = 0$$



C) Linéarité de l'intégration

Propriétés : admise

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et λ un réel. Pour tous réels a et b de I , on a :

- $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$
- $\displaystyle\int_a^b (\lambda f)(t)\,dt = \lambda\int_a^b f(t)\,dt$

3) ENCADREMENT - VALEUR MOYENNE

Propriétés :

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , et a et b deux réels de I tels que $a \le b$:

- si pour tout x de $[a\,;b]$ on a $f(x) \ge 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$
- si pour tout x de $[a\,;b]$ on a $f(x) \le g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

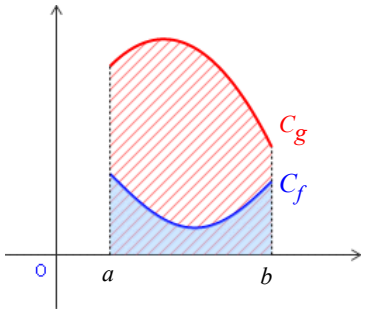
On traduit la deuxième inégalité, en disant que si $a \le b$, on peut intégrer l'inégalité $f \le g$ sur $[a\,;b]$.

Preuve : La première propriété est admise

Pour tout x de $[a\,;b]$ on a $f(x) \le g(x)$, donc $g(x) - f(x) \ge 0$

$a \le b$, la propriété précédente permet donc d'affirmer que $\displaystyle\int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx \ge 0$

Ainsi $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \ge 0$ c'est-à-dire $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$



Remarque :

Si f et g sont deux fonctions continues et positives telles que $f(x) \le g(x)$ pour tout $x \in [a\,;b]$ avec $a \le b$.

L'inégalité $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)$ s'interprète de façon immédiate en termes d'aires :

Théorème : inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$. (avec $a < b$). Soit m et M deux réels, telles que pour tout x de $[a\,;b]$ on ait $m \le f(x) \le M$, alors :

$$m(b-a) \le \int_a^b f(t)\,dt \le M(b-a) \Leftrightarrow m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \le M$$

Preuve :
Pour tout x de $[a ; b]$ on a $m \leq f(x) \leq M$. Comme $a < b$, on en déduit :

$$\int_a^b m\,dt \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b M\,dt \Leftrightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a) \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \leq M \quad (\text{car } b-a>0)$$

Remarque:
Soit f une fonction continue sur $[a ; b]$. (avec $a < b$). Soit M un réel, tel que pour tout x de $[a ; b]$ on ait $|f(x)| \leq M$, alors :

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq M|b-a|$$

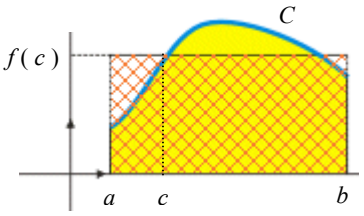
L'utilisation des valeurs absolues permet d'obtenir un résultat indépendant de l'ordre de a et b.

Propriété et définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux réels distincts de I .
Alors il existe un réel c entre a et b tel que :

$$\int_a^b f(t)\,dt = f(c)\,(b-a)$$

Le nombre $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$ est appellé **valeur moyenne** de f entre a et b.



Preuve : On suppose la fonction f croissante. (On admet le résultat dans le cas général)
Premier cas : $a < b$

Puisque f est croissante, pour tout réel x de $[a ; b]$ on a $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$. On a alors :

$$f(a)\,(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq f(b)\,(b-a) \Leftrightarrow f(a) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \leq f(b) \quad (\text{car } b-a>0)$$

Le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$ est dans l'intervalle $[f(a) ; f(b)]$

f est continue sur $[a ; b]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $c \in [a ; b]$ tel que $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt = f(c)$

Deuxième cas : $a > b$

$$\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt .$$

Puisque $b < a$,d'après le cas précédent, il existe $c \in [b ; a]$ tel que $\int_b^a f(t)\,dt = f(c)\,(a-b)$. On en déduit que :

$$-\int_b^a f(t)\,dt = f(c)\,(b-a) \Leftrightarrow \int_a^b f(t)\,dt = f(c)\,(b-a)$$

Remarque:
Le théorème de la moyenne indique que lorsqu'une fonction a des valeurs comprises entre m et M, sa valeur moyenne est comprise entre m et M.

4) INTEGRALES ET PRIMITIVES

A) Primitives d'une fonction continue

Théorème

Soit f est une fonction continue sur un intervalle I, et $a \in$ I .

La fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f s'annulant en a.

Preuve :
Prouvons d'abord que F est dérivable en tout point x_0 de I et que $F'(x_0) = f(x_0)$

Pour cela, étudions la limite en x_0 de la fonction T définie pour tout réel $h \neq 0$ tel que $x_0 + h$ est dans I par $T(h) = \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h}$

On a $F(x_0+h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^a f(t)\,dt + \int_a^{x_0+h} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$

Il existe c entre x_0 et x_0+h tel que $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt = (x_0+h-x_0)f(c) = hf(c)$. On en déduit que $T(h) = f(c)$.

Or lorsque h tend vers 0, c tend vers x_0 et puisque f est continue, $f(c)$, et donc $T(h)$, tend vers $f(x_0)$.
Ainsi, $\lim_{h \to 0} T(h) = f(x_0)$. On en déduit que F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.
L'unicité résulte du fait que $F(a) = 0$.

Remarques :

- Ce théorème affirme l'existence de primitives pour toute fonction continue sur un intervalle I.
- L'existence du logarithme est maintenant justifiée et donc celle de sa fonction réciproque.

B) Expression d'une intégrale à partir d'une primitive

Propriété

Soit f est une fonction continue sur un intervalle I , alors pour tous réels a et b de I, on a :

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) \qquad \text{où F est une primitive de } f \text{ sur I.}$$

Preuve :

On a vu que $x \longmapsto H(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f s'annulant en a.

Soit F une primitive de f sur I, on a donc : $F(x) = H(x) + k = \int_a^x f(t)\,dt + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

Donc $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt + k = 0 + k = k$ et $F(b) = \int_a^b f(t)\,dt + k$

Ainsi $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt + k - k = \int_a^b f(t)\,dt$

Remarque : On note aussi $F(b) - F(a) = \Big[F(t)\Big]_a^b$ qui se lit : " F (t) pris entre a et b ".

5) INTEGRATION PAR PARTIES

Propriété

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , dont les dérivées u' et v' sont continues sur I.
Soit a et b deux éléments de I . On a :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt = \Big[u(t)\,v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt$$

Preuve :

La formule de dérivation d'un produit permet d'écrire $(uv)' = u'v + uv'$
On en déduit que pour tout $t \in$ I , on a $(uv')(t) = (uv)'(t) - (u'v)(t)$
Les fonctions étant continues, on a alors pour $a \in$ I et pour $b \in$ I

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt = \int_a^b (uv)'(t)\,dt - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt = \Big[u(t)\,v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt$$

Exemple : Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$

Posons $u(x) = x$ $\quad v'(x) = \cos x$
$u'(x) = 1$ $\quad v(x) = \sin x$

Les fonctions u et v sont dérivables et leurs dérivées sont continues sur $[\,0\,;\frac{\pi}{2}\,]$. On a alors :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = \Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \Big[x\sin x + \cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - (0\sin 0 + \cos 0) = \frac{\pi}{2} - 1$$

Remarque :
Après avoir fait une intégration par parties, la nouvelle intégrale que l'on a à calculer doit être plus simple que la première . Si ce n'est pas le cas, il faut peut-être modifier le choix de u et v' . On pourra, si besoin est, utiliser plusieurs fois l'intégration par parties.