FONCTION EXPONENTIELLE

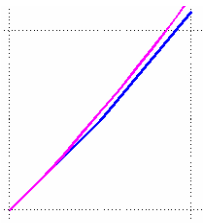
1) INTRODUCTION

A) LA METHODE D'EULER

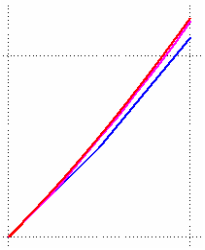
Si f est une fonction dérivable en x_0 , on sait que $f(x_0+h)$ a pour approximation affine $f(x_0)+f'(x_0)\,h$
On peut donc sur de "petits" intervalles, approcher la courbe d'une fonction par des "petits" segments.

Exemple : On suppose qu'il existe une fonction f définie sur [1 ; 2] telle que : $f'(x)=\sqrt{x}$ et $f(1)=1$

D'après les propriétés de la dérivée, on sait qu'en tout point x_0 de [1 ; 2], $f(x_0+h)$ a pour approximation affine $f(x_0)+f'(x_0)\,h$ c'est-à-dire $f(x_0)+\sqrt{x_0}\,h$



Partageons l'intervalle [1 ; 2] en deux intervalles de même amplitude : [1 ; 1,5] et [1,5 ; 2]
$f(1+h)$ a pour approximation affine $f(1)+\sqrt{1}\,h=1+h$.
On en déduit que $f(1,5)=f(1+0,5)\approx 1,5$
De plus $f(1,5+h)$ a pour approximation affine $f(1,5)+\sqrt{1,5}\,h$
On en déduit que $f(2)=f(1,5+0,5)\approx f(1,5)+\sqrt{1,5}\times 0,5$. Donc $f(2)\approx 1,5+\sqrt{1,5}\times 0,5\approx 2,1$
On a donc obtenu trois points d'abscisses respectives 1 ; 1,5 ; 2 et en reliant ces points par 2 segments —
, on approche la courbe C représentative de f .



On peut en utilisant le même procédé, approcher la courbe de f , en partageant l'intervalle en dix intervalles de même amplitude 0,1.
Alors $f(1)=1$; $f(1,1)\approx 1,1$; $f(1,2)\approx f(1,1)+\sqrt{1,1}\times 0,1$ etc...
On relie ces points par 10 segments —, pour approcher C .

Remarque :
On peut démontrer que la fonction f définie par $f(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{1}{3}$ vérifie les conditions imposées : $f'(x)=\sqrt{x}$ et $f(1)=1$.

Si on superpose sa courbe C – sur le dessin précédent, on remarque que les erreurs commises étaient faibles.

B) DESINTEGRATION RADIOACTIVE

Désintégration radioactive

En physique, la désintégration des atomes d'un corps radioactif est telle que, à chaque instant, la vitesse de désintégration est proportionnelle à la quantité restante de substance radioactif.
Soit N (t) le nombre d'atomes à l'instant t , Δt une durée proche de 0 et $\Delta N(t)$ la diminution du nombre d'atomes durant Δt.

La loi de désintégration s'écrit : $\frac{\Delta N(t)}{\Delta t}=-\lambda N(t)$ (λ étant la constante radioactive de ce corps, λ est un réel positif)
La présence du signe "-" indique que N décroît lorsque t augmente.
A priori, λ pourrait dépendre du temps . Ce serait le cas si un processus de vieillissement était en cause, comme, par exemple, si l'on s'intéresse au nombre de décès dans une population donnée.
Le fait que λ ne dépende pas du temps s'interprète comme un processus de « mort sans vieillissement ».

Comme le nombre d'atomes est très grand, les physiciens modélisent la situation en considérant que le nombre d'atomes est une fonction dérivable par rapport à la variable t . Ainsi,
$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t}=-\lambda N(t)$ devient $N'(t)=-\lambda N(t)$
A l'instant $t=0$, le nombre d'atomes est $N_0=N(0)$: cette égalité constitue une condition initiale.
La fonction N est donc solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation différentielle avec condition initiale :

$$\begin{cases} y'=-\lambda y \\ y(0)=N_0 \end{cases}$$

Δt représente la différence entre deux instants proches t_1 et t_2 .
$\Delta N(t)=N(t_1)-N(t_2)$ est la différence correspondante.
On a donc une équation portant sur les différences, d'où le nom d'équation différentielle.

On peut remarquer qu'aucune des fonctions rencontrées jusqu'à présent (fonctions polynômes, fonctions rationnelles, fonction racine carrée, fonctions sinus et cosinus...) ne sont solutions d'une telle équation différentielle (à part la fonction constante nulle).

2) DEFINITION

Propriété et définition

Il existe une unique fonction f , définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que :
$f'=f$ et $f(0)=1$
Cette fonction, notée exp, est appelée **fonction exponentielle**.

Ce qui signifie aussi :
L'équation différentielle avec condition initiale $\begin{cases} y'=y \\ y(0)=1 \end{cases}$ admet pour unique solution la fonction exp

Preuve :
L'existence d'une fonction f vérifiant les conditions $f' = f$ et $f(0) = 1$ est admise. On la note exp.
Démontrons son unicité.

Pour cela démontrons tout d'abord que pour tout réel x, on a $\exp(x) \neq 0$ et $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \exp(x) \times \exp(-x)$
Montrons que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$x \longmapsto \exp(-x)$ est la composée de la fonction exp et de la fonction $x \longmapsto -x$
Ces deux fonctions étant dérivables sur $\mathbb{R}$, $x \longmapsto \exp(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :

$$[\exp(-x)]' = -1 \times \exp'(-x) = -\exp(-x)$$

g est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g'(x) = [\exp(x)]' \times [\exp(-x)] + [\exp(x)] \times [\exp(-x)]' = \exp(x) \times \exp(-x) + \exp(x) \times [-\exp(-x)] = 0$$

On en déduit que la fonction g est constante sur $\mathbb{R}$.
On a $g(0) = \exp(0) \times \exp(-0) = \exp(0) \times \exp(0) = 1 \times 1 = 1$.
Puisque g est constante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $g(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
c'est-à-dire que $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Ainsi $\exp(x) \neq 0$ et $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Considérons une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$
$\exp(x)$ étant différent de 0 pour tout réel x, on peut considérer la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{f(x)}{\exp(x)}$
h est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$h'(x) = \frac{f'(x) \times \exp(x) - f(x) \times \exp'(x)}{[\exp(x)]^2} = \frac{f(x) \times \exp(x) - f(x) \times \exp(x)}{[\exp(x)]^2} = 0$$

h est donc une fonction constante sur $\mathbb{R}$.
D'autre part on a $h(0) = \dfrac{g(0)}{\exp(0)} = \dfrac{1}{1} = 1$
Donc pour tout réel x on a :

$$h(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\exp(x)} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \exp(x)$$

On en déduit alors l'unicité de la fonction exp.

La méthode d'Euler :

La méthode d'Euler permet d'obtenir une courbe approchée de la courbe qui représente la fonction exponentielle.
Pour h proche de 0, $\exp(x_0 + h) \approx (1 + h)\exp(x_0)$
Ainsi, pour $x_0 = 0$ et $h > 0$, on obtient $\exp(h) \approx 1 + h$, puis $\exp(2h) \approx (1 + h)^2$ et ainsi de suite :

$$\exp(nh) \approx (1 + h)^n \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

On remarque que les termes de la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\exp(nh)$ sont peu différents des termes de la suite géométrique définie par $(1 + h)^n$.
La fonction exponentielle apparaît comme une sorte de "prolongement continue" des suites géométriques.

3) PROPRIETES ALGEBRIQUES - NOTATION e^x

Propriété

Pour tous réels x et y, on a :

$$\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

La fonction exponentielle est donc une fonction transformant une somme en un produit.

Preuve :
Soit y un nombre réel fixé, on a vu que $\exp(y) \neq 0$
Considérons la fonction g de la variable réelle x, définie par $g(x) = \dfrac{\exp(x + y)}{\exp(y)}$
Montrons que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
y étant considéré comme une constante, la fonction $x \longmapsto \exp(x + y)$ est la composée de la fonction exponentielle et de la fonction $x \longmapsto x + y$
Ces deux fonctions étant dérivables sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $x \longmapsto \exp(x + y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, on a :

$$[\exp(x + y)]' = (x + y)' \times \exp'(x + y) = 1 \times \exp(x + y) = \exp(x + y)$$

D'autre part y étant considérée comme une constante, $\exp(y)$ est aussi une constante donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, on a :

$$g'(x) = \frac{[\exp(x + y)]'}{\exp(y)} = \frac{\exp(x + y)}{\exp(y)} = g(x)$$

De plus on a $g(0) = \dfrac{\exp(0 + y)}{\exp(y)} = \dfrac{\exp(y)}{\exp(y)} = 1$
g est donc une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$
g est donc la fonction exponentielle (puisqu'on a démontré l'unicité de la fonction vérifiant ces conditions)
On en déduit que pour tout réel x, $g(x) = \exp(x)$ c'est-à-dire $\dfrac{\exp(x + y)}{\exp(y)} = \exp(x)$

Ceci ayant été démontré quelque soit le réel y, on a justifié que :
Pour tous réels x et y, on a $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$

Remarque :
La fonction exponentielle est la seule fonction vérifiant :
- f est dérivable sur $\mathbb{R}$
- $f(0) = f'(0) = 1$
- pour tous réels x et y , $f(x+y) = f(x) \times f(y)$

Remarque :
En appliquant la relation précédente avec $y = x$, on obtient : $\exp(2x) = [\exp(x)]^2$
En appliquant de nouveau la relation avec $y = 2x$, on obtient : $\exp(3x) = \exp(2x) \times \exp(x) = [\exp(x)]^3$
On peut alors démontrer que pour tout entier naturel n , on a : $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$
On en déduit en particulier que pour tout entier naturel n , on a : $\exp(n) = \exp(n \times 1) = [\exp(1)]^n$
Si on note e le nombre $\exp(1)$, alors pour tout entier naturel n , on a : $\exp(n) = e^n$
(*relation que l'on peut aussi vérifier pour un entier négatif*)

Notation

On conviendra de noter pour tout réel x : $\exp(x) = e^x$ où $e = \exp(1)$
La fonction exponentielle est alors définie par :

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto e^x$$

Remarque:
Le nombre $e = \exp(1)$ a pour valeur approchée 2,718 (se trouve avec la méthode d'Euler)
La notation e^2 a donc une double signification : soit le nombre e élevé au carré, soit le nombre $\exp(2)$. (Ces deux nombres étant égaux)
Par contre la notation e^{π} ne peut désigner que le nombre $\exp(\pi)$.

Propriétés

Pour tous réels a et b , on a :

- $e^{a+b} = e^a e^b$
  On peut généraliser cette propriété à plusieurs nombres.
- $e^b \neq 0$
- $e^{-b} = \dfrac{1}{e^b}$
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- Si n est un entier relatif : $e^{na} = (e^a)^n$

Preuve:
- x et y étant deux réels, on a déjà démontré que $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$. Donc pour tous réels a et b on a : $e^{a+b} = e^a e^b$
- En prenant $a = -b$, on obtient en particulier :
  $e^{-b+b} = e^{-b} e^b \Leftrightarrow e^0 = e^{-b} e^b \Leftrightarrow 1 = e^{-b} e^b$
  On en déduit que pour tout $b \in \mathbb{R}$, $e^b \neq 0$ et $e^{-b} = \dfrac{1}{e^b}$
- Pour tous réels a et b , on peut écrire : $e^{a-b} = e^{a+(-b)} = e^a e^{-b} = e^a \cdot \dfrac{1}{e^b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- Enfin si n est un entier naturel, soit P (n) la proposition $e^{na} = (e^a)^n$
  Pour $n = 0$, on a $e^{na} = e^0 = 1$ et $(e^a)^0 = 1$ donc P (0) est vraie

  Supposons que P (n) est vraie pour un entier naturel fixé n . On a alors,
  $e^{na} = (e^a)^n \Leftrightarrow e^{na} \times e^a = (e^a)^n \times e^a \Leftrightarrow e^{na+a} = (e^a)^{n+1} \Leftrightarrow e^{(n+1)a} = (e^a)^{n+1}$
  On en déduit que P ($n+1$) est vraie.
  On a donc démontré par récurrence que P (n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $e^{na} = (e^a)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
  D'autre part $e^{-na} = \dfrac{1}{e^{na}} = \dfrac{1}{(e^a)^n} = (e^a)^{-n}$
  La propriété est donc vraie aussi pour les entiers négatifs.
  On en déduit que $e^{na} = (e^a)^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$

4) ETUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

Propriété

La fonction exponentielle est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(e^x)' = e^x$

Preuve :
On sait que toute fonction dérivable est continue, donc la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$

Propriétés

- $e^0 = 1$; $e^1 = e$
- Pour tout réel x , $e^x > 0$

Preuve :

On sait que $e^0 = 1$ donc $e^0 > 0$.

S'il existait un réel x tel que $e^x < 0$, alors le théorème des valeurs intermédiaires (puisque la fonction exponentielle est continue) justifierait l'existence d'un réel b tel que $e^b = 0$.

Or on a vu que pour tout réel b, $e^b \neq 0$.

Ainsi il n'existe aucun réel x tel que $e^x < 0$. On en déduit que pour tout réel x, $e^x > 0$

Propriété

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

La fonction exponentielle croît très vite (par exemple : $e^{50} \approx 5 \times 10^{21}$)

Preuve :

On sait que $(e^x)' = e^x$ et on a vu que $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Dans le langage courant, on parle souvent de phénomènes à "croissance exponentielle", pour indiquer que la croissance de ces phénomènes est très rapide.

Conséquences :

Pour tous réels a et b

- $a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$
- $a < b \Leftrightarrow e^a < e^b$
- $a \leq b \Leftrightarrow e^a \leq e^b$
- $a > 0 \Leftrightarrow e^a > 1$
- $a < 0 \Leftrightarrow 0 < e^a < 1$

Propriétés

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Preuve :

- La fonction exponentielle est strictement croissante, on a donc $e^1 > e^0$ donc $e > 1$.
  On en déduit que la suite (e^n) est une suite géométrique de raison e avec $e > 1$. Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n = +\infty$
  Soit $M > 0$.
  On a $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n = +\infty$, il existe donc n_0 tel que si $n > n_0$, $e^n > M$
  Or la fonction exponentielle est croissante. Ainsi, si $x > n > n_0$ on a $e^x > e^n > M$
  Ce résultat est vrai pour tout $M > 0$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$

Tableau de variations :

x	$-\infty$		$+\infty$
exp	0	↗	$+\infty$

Propriétés

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
- e^x a pour approximation affine $1 + x$ au voisinage de 0
- Pour tout réel x, on a $e^x \geq 1 + x$

Preuve :

- On sait que $(e^x)' = e^x$. Le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 est donc $e^0 = 1$
  Par définition du nombre dérivé, on peut donc écrire $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.
- Pour une fonction f dérivable en x_0, l'approximation affine de $f(x_0 + h)$ est $f(x_0) + f'(x_0) \times h$
  L'approximation affine de e^h est donc $e^0 + e^0 \times h = 1 + h$. L'approximation affine de e^x est donc $1 + x$.
  Cela revient à dire que la courbe de la fonction exponentielle a pour tangente au point d'abscisse 0 la droite d'équation $y = x + 1$
- Pour démontrer que $e^x \geq 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, considérons la fonction h définie par : $h(x) = e^x - x - 1$
  h est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, h est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a $h'(x) = e^x - 1$
  Si $x \leq 0$, on a : $e^x \leq 1 \Leftrightarrow e^x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow h'(x) \leq 0$
  Donc h est décroissante sur $]-\infty ; 0]$.
  Si $x \geq 0$, on a : $e^x \geq 1 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow h'(x) \geq 0$
  Donc h est croissante sur $[0 ; +\infty[$.
  On en déduit que si $x \leq 0$, on a $h(x) \geq h(0)$ et si $x \geq 0$, on a $h(x) \geq h(0)$
  D'autre part $h(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$. Ainsi, pour tout réel x, on a : $h(x) \geq h(0) \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 + x$

Propriétés

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$

Au voisinage de l'infini, l'exponentielle de x l'emporte sur x.

Preuve :

- On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $e^x \geq 1 + x$, on a donc en particulier $e^x \geq x$

  En appliquant cette relation à $\dfrac{x}{2}$, on obtient $e^{\frac{x}{2}} \geq \dfrac{x}{2}$

  Puis en élevant au carré (les deux membres sont positifs), on obtient :

  $$\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geq \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow e^{2\frac{x}{2}} \geq \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow e^x \geq \frac{x^2}{4}$$

  Ainsi pour tout réel $x > 0$, on a $\dfrac{e^x}{x} \geq \dfrac{x}{4}$

  On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{4} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

- Sachant que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, on peut en déduire que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x}}{-x} = +\infty$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{-x e^x} = +\infty$

  donc $\lim\limits_{x \to -\infty} -x e^x = 0^+$ et par conséquent $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0^-$. Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$

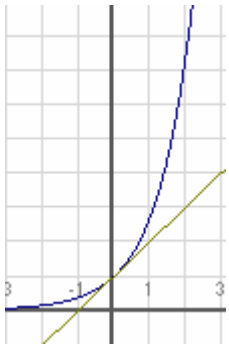
Représentation graphique :

- On a vu que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

La courbe a pour asymptote horizontale l'axe (Ox) quand x tend vers $-\infty$

- On a vu que e^x a pour approximation affine $1 + x$ au voisinage de 0 et que pourtout réel x, on a $e^x \geq 1 + x$

La courbe a pour tangente au point d'abscisse 0 la droite T d'équation $y = x + 1$ et la courbe se trouve au-dessus de T.



Propriété

La fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0 ; +\infty[$.
C'est-à-dire que pour tout $k \in]0 ; +\infty[$, l'équation $e^x = k$ a une solution unique dans $\mathbb{R}$.

Cette solution est notée $\ln k$.

Preuve :

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$. On en déduit le résultat.

$e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que si $k \leq 0$, l'équation $e^x = k$ n'a pas de solution.

5) DERIVEE DE $x \longmapsto e^{u(x)}$, PRIMITIVES DE $x \longmapsto u'(x)\, e^{u(x)}$

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
La fonction $\exp \circ u$ qui à x associe $e^{u(x)}$ est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$, on a :

$$(e^{u(x)})' = u'(x)\, e^{u(x)}$$

Preuve :

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction u est dérivable sur I.
On en déduit que la fonction exp o u est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$, on a : $(e^{u(x)})' = u'(x)\, e^{u(x)}$

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
La fonction $f : x \longmapsto u'(x)\, e^{u(x)}$ admet des primitives sur I.
L'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions de la forme $x \longmapsto e^{u(x)} + k$ (où $k \in \mathbb{R}$)