EQUATIONS DIFFERENTIELLES

1) RESOLUTON DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE : $y' = a\,y$ $(a \neq 0)$

Résoudre dans un intervalle I l'équation différentielle $y' = a\,y$ $(a \neq 0)$ d'inconnue la fonction y, c'est trouver toutes les fonctions f dérivables sur I , telles que pour tout x de I , $f'(x) = a\,f(x)$.
Une telle fonction est dite solution sur I de l'équation différentielle $y' = a\,y$

A) SOLUTION GENERALE

Propriété

Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = a\,y$ $(a \neq 0)$ sont les fonctions f_k définies par $f_k(x) = k\,e^{a\,x}$ où $k \in \mathbb{R}$.

Preuve :

- Pour tout réel k , $f_k'(x) = a\,k\,e^{a\,x} = a\,f_k(x)$. Ainsi f_k est solution de l'équation différentielle $y' = a\,y$
- Démontrons que les fonctions f_k sont les seules solutions.
  Pour cela, supposons qu'une fonction g est solution de $y' = a\,y$ et notons z la fonction définie pour tout réel x par $z(x) = g(x)\,e^{-a\,x}$

  La fonction z est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , on a $z'(x) = e^{-a\,x}\,(g'(x) - a\,g(x))$.
  Or g est solution de $y' = a\,y$, ainsi pour tout réel x , on a $g'(x) = a\,g(x)$ et $z'(x) = 0$.
  On en déduit que la fonction z est constante sur $\mathbb{R}$.
  Il existe donc un réel k tel que pour tout réel x , $z(x) = k$
  Ainsi pour tout réel x , on a $g(x) = k\,e^{a\,x}$

B) CONDITION INITIALE

Propriété

Pour tout couple de réel $(x_0 ; y_0)$, l'équation $y' = a\,y$ $(a \neq 0)$ admet une solution et une seule telle que $f(x_0) = y_0$

Preuve :

$f_k(x_0) = y_0 \Leftrightarrow k\,e^{a\,x_0} = y_0$
Ainsi il n'y a qu'une seule valeur possible pour k et $k = y_0\,e^{-a\,x_0}$.
La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = y_0\,e^{a\,(x - x_0)}$

2) RESOLUTION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE : $y' = a\,y + b$ $(a \neq 0)$

A) SOLUTION GENERALE

Propriété

Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = a\,y + b$ $(a \neq 0)$ sont les fonctions f_k définies par $f_k(x) = k\,e^{a\,x} - \frac{b}{a}$ où $k \in \mathbb{R}$.

Preuve :

$a \neq 0$, l'équation $y' = a\,y + b$ est donc équivalente à $y' = a\left(y + \frac{b}{a}\right)$.

Si on note $z = y + \frac{b}{a}$, alors $z' = y'$ et l'équation devient : $z' = a\,z$.

Les solutions de cette deuxième équation sont les fonctions g_k de la forme $g_k(x) = k\,e^{a\,x}$ où $k \in \mathbb{R}$.

Les solutions de $y' = a\,y + b$ sont donc les fonctions f_k telles que $f_k(x) + \frac{b}{a} = g_k(x)$, c'est à dire $f_k(x) = g_k(x) - \frac{b}{a}$ où $k \in \mathbb{R}$

B) CONDITION INITIALE

Propriété

Pour tout couple de réel $(x_0 ; y_0)$, l'équation $y' = a\,y + b$ $(a \neq 0)$ admet une solution et une seule telle que $f(x_0) = y_0$

Preuve :

$f_k(x_0) = y_0 \Leftrightarrow k\,e^{a\,x_0} - \frac{b}{a} = y_0 \Leftrightarrow k\,e^{a\,x_0} = y_0 + \frac{b}{a} \Leftrightarrow k = e^{-a\,x_0}\left(y_0 + \frac{b}{a}\right)$

Ainsi il n'y a qu'une seule valeur possible pour k et $k = e^{-a\,x_0}\left(y_0 + \frac{b}{a}\right)$.

La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right)e^{a\,(x - x_0)} - \frac{b}{a}$