LES NOMBRES COMPLEXES

1) DEFINITION - REPRESENTATION GEOMETRIQUE

Définition :

On appelle **corps des nombres complexes**, et on note $\mathbb{C}$ un ensemble contenant $\mathbb{R}$ tel que :

- Il existe dans $\mathbb{C}$ un élément noté i tel que $i^2 = -1$.
- Tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $a + b\,i$, où a et b sont des réels.
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent l'addition et la multiplication de $\mathbb{R}$, et qui suivent les mêmes règles de calcul.

Un nombre complexe sera souvent représenté par la lettre z.

Nombres complexes particuliers :

Soit un nombre complexe $z = a + b\,i$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- si $b = 0$, on a $z = a$, z est un réel. ($\mathbb{R}$ est contenu dans $\mathbb{C}$)
- si $a = 0$, on a $z = b\,i$, on dit que z est un imaginaire pur (on dit parfois simplement imaginaire).

Remarques :

- $\mathbb{R}$ correspond à l'ensemble des points sur une droite. Un nombre réel x correspond au point d'abscisse x sur la droite.
  On peut donc toujours comparer deux nombres réels :
  si x et y sont des réels, on a nécessairement $x \leq y$ ou $y \leq x$ (Le point d'abscisse x se trouve, sur la droite, "avant" ou "après" le point d'abscisse y)
- $\mathbb{C}$, ensemble des nombres $a + b\,i$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ correspond à l'ensemble des points d'un plan.
  Un nombre complexe $a + b\,i$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ correspond au point du plan de coordonnées $(a\,;\,b)$.
  On ne peut donc pas comparer deux nombres complexes : il n'y a pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$.
  On ne peut donc pas dire qu'un nombre complexe z est inférieur à un nombre complexe z' ou qu'un nombre complexe z est positif.

Propriété

L'écriture d'un nombre complexe sous la forme $z = a + bi$, où a et b sont des réels, est unique.

Preuve :

Considérons un nombre complexe z s'écrivant de deux façons : $z = a + bi$ et $z = a' + b'i$, avec a , b , a' , b' réels.
On a alors $a + bi = a' + b'i$ et on en déduit $a - a' = i\,(b' - b)$

Supposons que $b \neq b'$, on aurait alors $i = \dfrac{a - a'}{b' - b}$,

Ceci n'est pas possible puisque $i \notin \mathbb{R}$ alors que $\dfrac{a - a'}{b' - b} \in \mathbb{R}$

On ne peut donc pas avoir $b \neq b'$, ce qui signifie que $b = b'$.
Alors $b' - b = 0$ et comme on sait que $a - a' = i\,(b' - b)$, on en déduit $a - a' = 0$ c'est-à-dire $a = a'$.
On a donc obtenu $a = a'$ et $b = b'$. Les deux écritures de z sous la forme $a + bi$ et $a' + b'i$ sont donc identiques.

Définition

Soit un nombre complexe z .
L'écriture $z = a + bi$, où a et b sont des réels, est appelée forme algébrique du nombre complexe z.
a est appelé **partie réelle** de z, et b **partie imaginaire** de z. On *note* $a = \text{Re}\,(z)$ et $b = \text{Im}\,(z)$.

Remarques :

- La partie réelle de z est un nombre réel.
- La partie imaginaire de z est un nombre réel.

Propriété

Deux complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.
C'est-à-dire que si a , b , a' , b' sont des réels, on a

$$a + bi = a' + b'i \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

Preuve :

Soit z et z' deux nombres complexes : $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$, avec a , b , a' , b' réels.
On a alors $a = \text{Re}\,(z)$, $a' = \text{Re}\,(z')$, $b = \text{Im}\,(z)$ et $b' = \text{Im}\,(z')$
Si $z = z'$, alors $a + bi = a' + b'i$ et comme la forme algébrique d'un nombre complexe est unique, on en déduit que $a = a'$ et $b = b'$.
Donc z et z' ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Réciproquement, si z et z' ont la même partie réelle et la même partie imaginaire, alors $a = a'$ et $b = b'$
et par conséquent $a + bi = a' + b'i$, c'est-à-dire $z = z'$

Exemple : Soit $z = 2 + 3\,i$ et $z' = i - 5$. Calculer et écrire sous la forme algébrique :

$z + z' =$ $\qquad$ $z - z' =$

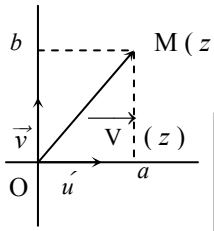
$2z - 3z' =$ $\qquad$ $z.z' =$ $\qquad$ $z^2 =$

Définition

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
Au point M de coordonnées $(a\,;\,b)$, on peut associer le nombre complexe $z = a + bi$.
On dit que $z = a + bi$ est **l'affixe** de M ou que M$(a\,;\,b)$ est **l'image ponctuelle** de $z = a + bi$.

Au vecteur $\overrightarrow{V}$ de coordonnées $(a\,;\,b)$, on peut associer le nombre complexe $z = a + bi$.

On dit que $z = a + bi$ est **l'affixe** de $\overrightarrow{V}$ ou que $\overrightarrow{V}$ $(a\,;\,b)$ est **l'image vectorielle** de $z = a + bi$.

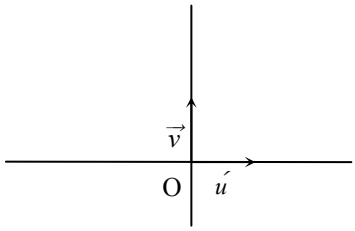


Lorsqu'on repère un point ou un vecteur par son affixe dans un repère orthonormal direct, on dit qu'on se place dans le plan complexe.

Exemple : Placer dans le plan complexe, les points d'affixes :

$z_1 = 2 + 2i$; $z_2 = 3 + i$; $z_3 = -1 + 2i$; $z_4 = 2 - i$

$z_5 = i$ $z_6 = -i$; $z_7 = 1$; $z_8 = -i - 3$



Propriétés

Si M a pour affixe $z = a + bi$ et si M' a pour affixe $z' = a' + b'i$, avec a, b, a', b' réels, alors :

- le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z' - z = (a' - a) + (b' - b)i$
- $OM = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $MM' = \|\overrightarrow{MM'}\| = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2}$

- le milieu I de [MM'] a pour affixe $z_I = \dfrac{z + z'}{2}$
- le barycentre G de (M ; α) et (M' ; β) a pour affixe $z_G = \dfrac{\alpha z + \beta z'}{\alpha + \beta}$ $(\alpha + \beta \neq 0)$

(Cette formule se généralise au barycentre de n points pondérés)

Preuve :

M a pour coordonnées $(a\,;\,b)$ et M' a pour coordonnées $(a'\,;\,b')$. Les résultats vus en 1ère sur les coordonnées permettent d'écrire :

- $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $(a' - a\,;\,b' - b)$, donc $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $(a' - a) + (b' - b)\,i = a' - a + b'i - bi = a' + b'i - (a + bi) = z' - z$
- le milieu I de [MM'] a pour coordonnées $\left(\dfrac{a + a'}{2}\,;\,\dfrac{b + b'}{2}\right)$, donc son affixe est :

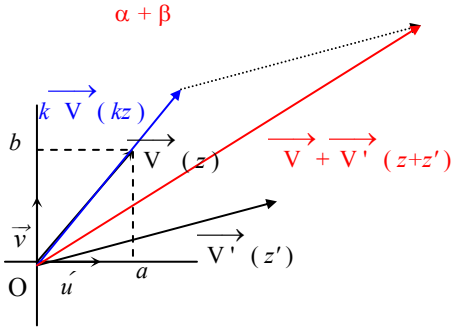
$$z_I = \frac{a + a'}{2} + i\,\frac{b + b'}{2} = \frac{a + a' + bi + b'i}{2} = \frac{a + bi + a' + b'i}{2} = \frac{z + z'}{2}$$

- pour $\alpha + \beta \neq 0$, le barycentre G de (M ; α) et (M' ; β) a pour coordonnées $\left(\dfrac{\alpha a + \beta a'}{\alpha + \beta}\,;\,\dfrac{\alpha b + \beta b'}{\alpha + \beta}\right)$ donc son affixe est :

$$z_G = \frac{\alpha a + \beta a'}{\alpha + \beta} + i\,\frac{\alpha b + \beta b'}{\alpha + \beta} = \frac{\alpha a + \beta a' + \alpha bi + \beta b'i}{\alpha + \beta} = \frac{\alpha a + \alpha bi + \beta a' + \beta b'i}{\alpha + \beta} = \frac{\alpha\,(a + bi) + \beta(a' + b'i)}{\alpha + \beta} = \frac{\alpha z + \beta z'}{\alpha + \beta}$$

Propriétés

- Si $\overrightarrow{V}$ a pour affixe z et $\overrightarrow{V'}$ pour affixe z', alors $\overrightarrow{V} + \overrightarrow{V'}$ a pour affixe $z + z'$.
- Si k est un réel, alors $k\,\overrightarrow{V}$ a pour affixe kz.



Preuve :

- Soit $a + bi$ et $a' + b'i$ les formes algébriques de z et z'.

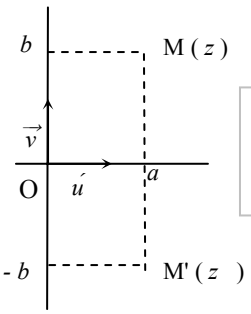
Le vecteur $\overrightarrow{V}$ a pour coordonnées $(a\,;\,b)$ et le vecteur $\overrightarrow{V'}$ a pour coordonnées $(a'\,;\,b')$.

On sait alors que le vecteur $\overrightarrow{V} + \overrightarrow{V'}$ a pour coordonnées $(a + a'\,;\,b + b')$. Il a donc pour affixe :
$a + a' + (b + b')i = a + a' + bi + b'i = a + bi + a' + b'i = z + z'$.

- Si k est un réel, alors on sait que $k\,\overrightarrow{V}$ a pour coordonnées $(ka\,;\,kb)$, donc $k\,\overrightarrow{V}$ a pour affixe : $ka + kbi = k(a + bi) = kz$.

Définition

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $a + bi$.
On appelle **conjugué** de z le nombre complexe noté $\overline{z}$ tel que $\overline{z} = a - bi$.



Si M est le point d'affixe z, le point M' d'affixe $\overline{z}$ est symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

Exemple : Soit $z = 3 + 5i$ et $z' = -2 + 3i$. Calculer :

$\overline{z}$ = $\overline{z'}$ = $\overline{z} + \overline{z'}$ = $z + z'$ =

$\overline{z + z'}$ = $\overline{z}\,.\,\overline{z'}$ = zz' = $\overline{zz'}$ =

Propriétés

Pour tous nombres complexes z et z', on a :

- $\overline{z} = z$
- $z \cdot \overline{z}$ est un réel positif
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$
- Si $z' \neq 0$ $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
- $\text{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$; $\text{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$; $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\overline{z}$

Preuve :

Soit les nombres complexes écrits sous la forme algébrique : $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$.

- $\overline{z} = a - bi$ donc $\overline{\overline{z}} = a + bi = z$
- $z.\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2$ donc $z.\overline{z}$ est un réel positif .
- $z + z' = a + bi + a' + b'i = (a + a') + (b + b')i$.
  Comme $(a + a')$ et $(b + b')$ sont des réels, on obtient : $\overline{z + z'} = (a + a') - (b + b')i = a - bi + a' - b'i = \overline{z} + \overline{z'}$
- $z - z' = a + bi - (a' + b'i) = (a - a') + (b - b')i$.
  Comme $(a - a')$ et $(b - b')$ sont des réels, on obtient : $\overline{z - z'} = (a - a') + (b - b')i = a - bi - a' + b'i = \overline{z} - \overline{z'}$
- $zz' = (a + bi)(a' + b'i) = aa' + ab'i + a'bi + bb'i^2 = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$
  Comme $(aa' - bb')$ et $(ab' + a'b)$ sont des réels, on obtient : $\overline{zz'} = (aa' - bb') - (ab' + a'b)i$
  D'autre part $\overline{z}.\overline{z'} = (a - bi)(a' - b'i) = aa' - ab'i - a'bi + bb'i^2 = (aa' - bb') - (ab' + a'b)i = \overline{zz'}$
- Si $z' \neq 0$ $\frac{1}{z'} = \frac{1}{a' + b'i} = \frac{a' - b'i}{(a' + b'i)(a' - b'i)} = \frac{a' - b'i}{a'^2 + b'^2} = \frac{a'}{a'^2 + b'^2} + \frac{-b'}{a'^2 + b'^2}i$
  Comme $\frac{a'}{a'^2 + b'^2}$ et $\frac{-b'}{a'^2 + b'^2}$ sont des réels, on obtient : $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{a'}{a'^2 + b'^2} + \frac{b'}{a'^2 + b'^2}i$
  D'autre part $\overline{z'} = a' - b'i$, donc $\frac{1}{\overline{z'}} = \frac{1}{a' - b'i} = \frac{a' + b'i}{(a' - b'i)(a' + b'i)} = \frac{a' + b'i}{a'^2 + b'^2} = \frac{a'}{a'^2 + b'^2} + \frac{b'}{a'^2 + b'^2}i = \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}$
- Si $z' \neq 0$ $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{\left(z \times \frac{1}{z'}\right)} = \overline{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \overline{z} \times \frac{1}{\overline{z'}} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
- $\frac{z + \overline{z}}{2} = \frac{a + bi + a - bi}{2} = \frac{2a}{2} = a = \text{Re}(z)$; $\frac{z - \overline{z}}{2i} = \frac{a + bi - (a - bi)}{2i} = \frac{2bi}{2i} = b = \text{Im}(z)$
- $z = \overline{z} \Leftrightarrow a + bi = a - bi \Leftrightarrow a + bi - a + bi = 0 \Leftrightarrow 2bi = 0 \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
- $z = -\overline{z} \Leftrightarrow a + bi = -a + bi \Leftrightarrow 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$

Remarque : La propriété $z.\overline{z} \in \mathbb{R}_+$ sera utile pour trouver les formes algébriques d'inverses et de quotients.

Exemple : $\frac{1 + i}{2 - i} = \frac{(1 + i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{2 + i + 2i - 1}{4 - i^2} = \frac{1 + 3i}{4 + 1} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$

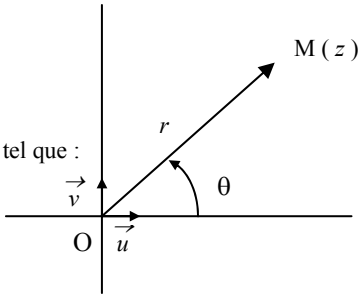
2) FORME TRIGONOMETRIQUE - MODULE - ARGUMENT

A) FORME TRIGONOMETRIQUE

Rappel :

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Soit M $(a ; b)$ un point du plan (distinct de O) .
On appelle **coordonnées polaires** de M , tout couple de nombres réels (r , θ) tel que :

$r = OM$ et $(\vec{u} , \overrightarrow{OM}) = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$



On a alors $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
$a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$

$z = a + ib$
$= r\cos\theta + i\, r\sin\theta$
$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$

Remarque :

Soit M le point d'affixe x avec $x \in \mathbb{R}$, on a $r = OM = |x|$

Définition

Tout nombre complexe non nul z peut-être écrit sous la forme :
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.
On dit que $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ est une **forme trigonométrique** de z.

Propriété

Si deux nombres complexes z et z' sont écrits sous forme trigonométrique $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$, on a :

$$z = z' \Leftrightarrow r(\cos\theta + i\sin\theta) = r'(\cos\theta' + i\sin\theta') \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' \ [2\pi] \end{cases}$$

Preuve : Considérons les points M et M' d'affixes respectives z et z'. On peut écrire :

$$z = z' \Leftrightarrow M = M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ (\vec{u}\,;\overrightarrow{OM}) = (\vec{u}\,;\overrightarrow{OM'}) \ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' \ [2\pi] \end{cases}$$

B) MODULE

Définition

Soit le nombre complexe z de forme algébrique $a + bi$ et soit M le point d'affixe z.
On appelle **module** de z le nombre réel positif $r = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$. On note $r = |z|$.

Remarque :
La notation $|z|$ ne risque pas de prêter à confusion avec la notation de la valeur absolue puisque lorsque x est un nombre réel, on a $r = OM = |x|$.
Pour un réel x , $|x|$ pourra être lu indifféremment "valeur absolue de x" ou "module de x".
Pour un nombre complexe non réel z , $|z|$ sera lu impérativement "module de z".

Exemple : - Calculer le module de $z_1 = 3 + 4i$:

- Donner la forme trigonométrique de $z_2 = \sqrt{3} + i$:

Propriétés

- Soit $\overrightarrow{V}$ un vecteur d'affixe z , on a $\|\overrightarrow{V}\| = |z|$
- Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A *et* z_B , on a $AB = |z_B - z_A|$.

Preuve :

Si $\overrightarrow{V}$ est un vecteur d'affixe z, on a $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{OM}$ avec M d'affixe z . Alors $\|\overrightarrow{V}\| = \|\overrightarrow{OM}\| = OM = |z|$.

Si A et B sont les points d'affixes respectives z_A et z_B , le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$ ...

Propriétés

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|-z| = |z|$
- $|\bar{z}| = |z|$
- $|z + z'| \le |z| + |z'|$
- $|z\,z'| = |z| \,.\, |z'|$
- si $z' \neq 0$ $\left|\dfrac{1}{z'}\right| = \dfrac{1}{|z'|}$
- si $z' \neq 0$ $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
- $z\,\bar{z} = |z|^2$ (on retrouve $z\,\bar{z} \in \mathbb{R}_+$)
- si $z \neq 0$ $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

Preuve :

- Soit M le point d'affixe z dans le plan rapporté au repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ .On peut écrire : $|z| = 0 \Leftrightarrow OM = 0 \Leftrightarrow M = O \Leftrightarrow z = 0$
- Le point M' d'affixe $-z$ est symétrique du point M par rapport à l'origine O.
  La symétrie conservant les distances on a : $OM' = OM$ donc $|-z| = |z|$
- Le point M" d'affixe $\bar{z}$ est symétrique du point M par rapport à l'axe $(O;\vec{u})$.
  La symétrie conservant les distances on a : $OM'' = OM$ donc $|\bar{z}| = |z|$
- Soit $\vec{v}$ le vecteur d'affixe z et $\vec{v}'$ le vecteur d'affixe z'.
  On sait que le vecteur $\vec{v} + \vec{v}'$ a pour affixe $z + z'$.
  En utilisant l'inégalité triangulaire, on a $\|\vec{v} + \vec{v}'\| \le \|\vec{v}\| + \|\vec{v}'\|$ donc $|z + z'| \le |z| + |z'|$
- Si z a pour forme algébrique $z = a + bi$ et si z' a pour forme algébrique $z' = a' + b'i$, alors :
  $z\,z' = (a + bi)(a' + b'i) = aa' + ab'i + a'bi + bb'i^2 = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$
  Comme $(aa' - bb')$ et $(ab' + a'b)$ sont des réels, on en déduit que :

$$|z\,z'| = \sqrt{(aa' - bb')^2 + (ab' + a'b)^2} = \sqrt{a^2a'^2 + b^2b'^2 + a^2b'^2 + a'^2b^2} = \sqrt{a^2(a'^2 + b'^2) + b^2(b'^2 + a'^2)} = \sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)} = \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a'^2 + b'^2} = |z| \,.\, |z'|$$

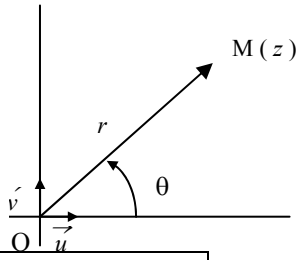
- si $z' \neq 0$ on a, d'après la propriété précédente :
  $|z'| \times \left|\dfrac{1}{z'}\right| = \left|z' \times \dfrac{1}{z'}\right| = |1| = 1$, donc $\left|\dfrac{1}{z'}\right| = \dfrac{1}{|z'|}$ et $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \left|z \times \dfrac{1}{z'}\right| = |z| \times \left|\dfrac{1}{z'}\right| = |z| \times \dfrac{1}{|z'|} = \dfrac{|z|}{|z'|}$
- $z\,\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$ (donc $z\,\bar{z} \in \mathbb{R}_+$)
- si $z \neq 0$ $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

C) ARGUMENT

Définition

Soit le nombre complexe non nul z de forme algébrique $a + bi$ et soit M le point d'affixe z.

On appelle **argument** de z tout nombre réel θ tel que $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})\ [2\pi]$. On note $\theta = \arg(z)$



Remarque :

θ n'est pas unique, il est défini à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$) c'est-à-dire modulo 2π.

Propriétés

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls d'arguments respectifs θ et θ ' . On a :

• $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = \cos(\theta + \theta') + i\ \sin(\theta + \theta')$	$\arg(zz') = \arg z + \arg z'$	$[2\pi]$
• $\dfrac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos(\theta) + i\sin(-\theta)$	$\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg z$	$[2\pi]$
• $\dfrac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta' + i\sin\theta'} = \cos(\theta - \theta') + i\sin(\theta - \theta')$	$\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'$	$[2\pi]$
• $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$	$\arg(z^n) = n \arg z$	$[2\pi]$
• $\cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$	$\arg(\overline{z}) = -\arg z$	$[2\pi]$
• $-(\cos\theta + i\sin\theta) = \cos(\theta + \pi) + i\sin(\theta + \pi)$	$\arg(-z) = \arg z + \pi$	$[2\pi]$

Preuve :

- On a : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r \in \mathbb{R}_+$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ avec $r' \in \mathbb{R}_+$.
  On montre facilement que : $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = \cos(\theta + \theta') + i\ \sin(\theta + \theta')$.
  On peut en déduire : $zz' = rr'(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = rr'[\cos(\theta + \theta') + i\ \sin(\theta + \theta')]$.
  Comme rr' est un nombre réel positif, on a donc $\arg(zz') = \arg z + \arg z'\ [2\pi]$
- On montre facilement que : $\dfrac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$
  On peut en déduire que : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r} \times \dfrac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \dfrac{1}{r}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$
  Comme $\dfrac{1}{r}$ est un nombre réel positif, on a donc $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\theta = -\arg z\ [2\pi]$.
- On a :
  $\dfrac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta' + i\sin\theta'} = (\cos\theta + i\sin\theta) \times \dfrac{1}{\cos\theta' + i\sin\theta'} = (\cos\theta + i\sin\theta) \times [\cos(-\theta') + i\sin(-\theta')] = \cos(\theta - \theta') + i\ \sin(\theta - \theta')$
  Alors $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'} \times \dfrac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta' + i\sin\theta'} = \dfrac{r}{r'} \times [\cos(\theta - \theta') + i\ \sin(\theta - \theta')]$
  Comme $\dfrac{r}{r'}$ est un nombre réel positif, on a donc $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \theta - \theta' = \arg z - \arg z'$
- Soit P(n) la proposition : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.
  Pour $n = 0$, on a :
  $(\cos\theta + i\sin\theta)^0 = 1$ et $\cos(0 \times \theta) + i\sin(0 \times \theta) = \cos(0) + i\sin(0) = 1 + 0\,i = 1$, donc P(0) est vraie.
  Supposons P(n) vérifiée pour un entier naturel n, c'est-à-dire $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.
  Alors en multipliant les deux membres par $(\cos\theta + i\sin\theta)$, on obtient :
  $(\cos\theta + i\sin\theta)^{n+1} = [\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)](\cos\theta + i\sin\theta) = \cos(n\theta + \theta) + i\sin(n\theta + \theta) = \cos((n+1)\theta) + i\sin((n+1)\theta)$
  P(n+1) est alors justifiée.
  On a donc démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.
  Lorsque l'on considère un entier négatif, que l'on peut noter $-n$ avec $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire, en utilisant les propriétés déjà démontrées :
  $(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = \dfrac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^n} = \dfrac{1}{\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)} = \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)$
  La proposition est donc vérifiée pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
  On peut écrire $z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = r^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$
  Comme r^n est un réel positif, on a donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $\arg(z^n) = n \arg z\ [2\pi]$
- Sachant que $\cos(-\theta) = \cos\theta$ et $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, on peut écrire : $\cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$
  Alors $\overline{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta) = r[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$.
  Comme r est un réel positif, on en déduit $\arg(\overline{z}) = -\theta = -\arg z\ [2\pi]$
- Sachant que $\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$ et $\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$, on peut écrire : $-(\cos\theta + i\sin\theta) = -\cos\theta - i\sin\theta = \cos(\theta + \pi) + i\sin(\theta + \pi)$
  Alors $-z = -r(\cos\theta + i\sin\theta) = r[\cos(\theta + \pi) + i\sin(\theta + \pi)]$.
  Comme r est un réel positif, on en déduit $\arg(-z) = \theta + \pi = \arg z + \pi\ [2\pi]$

Propriétés

Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ un nombre complexe écrit sous forme trigonométrique. $\overline{z}$ et $-z$ ont pour formes trigonométriques :

$\overline{z} = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$ et $-z = r(\cos(\theta + \pi) + i\sin(\theta + \pi))$

D) NOTATION EXPONENTIELLE

Remarque :
D'après les résultats précédemment démontrés, l'argument du produit de deux nombres complexes est égal à la somme des arguments de ces deux nombres . C'est-à-dire que la fonction $f : \theta \longmapsto \cos\theta + i\sin\theta$ est telle que $f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta')$.
Elle vérifie donc l'équation fonctionnelle caractéristique de la fonction exponentielle.

Notation :

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ et par conséquent pour $r \in \mathbb{R}_+^*$ $r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$

Cette notation est appelée **notation exponentielle**.

Propriétés

Les résultats déjà vus s'écrivent, avec la notation exponentielle :

$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ $\quad \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{i(-\theta)} = e^{-i\theta}$ $\quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = e^{ni\theta}$ $\quad n \in \mathbb{Z}$ $\quad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ $\quad -e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$

Remarques :

- La propriété $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$, facile à retenir, permet de retrouver les **formules d'addition** :
  $\cos(\theta + \theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'$ et $\sin(\theta + \theta') = \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'$
- La propriété $(e^{i\theta})^2 = e^{2i\theta}$ permet de retrouver les **formules de duplication** :
  $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ et $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$
- On peut vérifier que : $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$. Ce sont les **formules d'EULER**
- La relation $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$ est appelée **formule de MOIVRE**

3) EQUATION DU SECOND DEGRE A COEFFICIENTS REELS

Propriété

L'équation $az^2 + bz + c = 0$, où a, b et c sont des réels (avec $a \neq 0$) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions (éventuellement confondues).
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation. Δ est un nombre réel.

- si $\Delta \geq 0$, les deux solutions sont réelles : $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
- si $\Delta < 0$, les deux solutions sont des nombres complexes non réels, conjugués l'un de l'autre :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Le trinôme $az^2 + bz + c$ peut alors se factoriser sous la forme $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

Preuve :
On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$, où a, b et c sont des réels (avec $a \neq 0$)

On peut écrire $az^2 + bz + c = a\left[z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

- si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions réelles, et deux seulement . Comme $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, l'équation a donc deux solutions complexes et deux seulement qui sont :

  $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

  Ce résultat a déjà été vu en classe de 1ère.
- si $\Delta = 0$, l'équation a une solution réelle $z = -\frac{b}{2a}$
- si $\Delta < 0$, on utilise l'identité $z^2 + z'^2 = (z + iz')(z - iz')$

  $-\Delta > 0$ et on peut écrire : $-\Delta = \sqrt{-\Delta}^2$, donc $\Delta = -\sqrt{-\Delta}^2 = i^2\sqrt{-\Delta}^2 = (i\sqrt{-\Delta})^2$
  on obtient alors :

  $$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(i\sqrt{-\Delta})^2}{4a^2}\right] = a\left(z - \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z - \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$$

  On en déduit que l'équation $az^2 + bz + c = 0$ a deux solutions complexes qui sont :

  $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

  Ces deux solutions sont des nombres complexes non réels, conjugués l'un de l'autre.

La démonstration précédente fait apparaître la factorisation du trinôme $az^2 + bz + c$ sous la forme $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.