# SUITES GÉOMÉTRIQUES

## 1 ) DÉFINITION PAR RÉCURRENCE

**Définition :**

On dit qu'une suite $(u_n)$ est une **suite géométrique**, s'il existe un réel $q$ tel que pour tout entier naturel $n$, on ait $u_{n+1} = qu_n$ .
Le réel $q$ est appelé **raison** de la suite $(u_n)$.

***q peut-être positif ou négatif et non nul ( sans intérêt )***

**Exemples :**

- Soit $(u_n)$ , la suite des puissances de 2 , définie par $u_n = 2^n$ . La suite $(u_n)$ est-elle une suite géométrique ?

- Soit $(v_n)$ la suite définie par $v_n = n \times 5^n$ . La suite $(v_n)$ est-elle une suite géométrique ?

- Soit $(w_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ , par $w_n = 4 \times 3^n$ . La suite $(w_n)$ est-elle une suite géométrique ?

Plus généralement, on montre de la même façon, que toute suite $(u_n)$ définie par $u_n = aq^n$ ( où $a \in \mathbb{R}^*$ et $q \in \mathbb{R}^*$ ) est une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $a$.

Et la réciproque !!

## 2 ) DÉFINITION PAR UNE FORMULE EXPLICITE

**Propriété :**

Soit $(u_n)$ une suite géométrique de premier terme $u_0$ et de raison $q$ .
Alors, pour tout entier naturel $n$ , on a :

**Preuve :**

$(u_n)$ est une suite géométrique, donc $u_1 = u_0 q$ . Puis $u_2 = u_1 q = (u_0 q) q = u_0 q^2$
Et ainsi de proche en proche, car lorsqu'on aura établi que pour l'entier naturel $p$ , $u_p = u_0 q^p$ , on en déduira que $u_{p+1} = u_0 q^{p+1}$ .
En effet $u_{p+1} = u_p q = u_0 q^p q = u_0 q^{p+1}$

**Exemple :** Soit $u_n$ la suite géométrique définie par $u_0 = 7$ et $r = 12$ . Calculer $u_3$.

**Plus généralement :**

Soit $(u_n)$ une suite géométrique de raison $q$ . Pour tout entier naturel $m$ et $n$ , on a

**Intérêt** : Cette formule permet de calculer n'importe quel terme d'une suite géométrique dès que l'on connaît la raison et un terme quelconque (il n'est pas nécessaire de connaître $u_0$)

**Exemples :**

- Soit $(u_n)$ une suite géométrique définie par $u_{10} = 30$ et $q = 2$ . Calculer $u_{13}$.

- Soit $(v_n)$ une suite géométrique telle que $v_2 = 5$ et $v_8 = 320$ . Déterminer la raison $q$ de cette suite géométrique.

**Attention :** Cette formule ne permet pas toujours de calculer la raison d'une suite géométrique dont on connaît deux termes .

## 3 ) LIMITE

**Propriété :**

Soit $q$ un réel .

- Si $0 \leqslant q < 1$ , alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- Si $q = 1$ , alors pour tout $n$ , $q^n = 1$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$
- Si $q > 1$ , alors la suite $(q^n)$ est divergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

**Exemple :** Étudier la limite de la suite $(u_n)$ définie par $u_n = 2^n$ .

**Remarque :**

On en déduit facilement le cas général $u_o q^n$ …

**Exemple :** Étudier la limite de la suite $(v_n)$ définie par $v_n = -5 \times 2^n$ .

**Remarques :**

- Si $-1 < q < 1$ , alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- Si $q \leqslant -1$ , alors la suite $(q^n)$ est divergente.

## 4 ) SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS

**Étude d'un exemple fondamental :** SUITE GÉOMETRIQUE DE PREMIER TERME $u_0 = 1$ .

On considère la suite $(u_n)$ définie, pour tout entier naturel $n$ , par $u_n = q^n$ ( $q \neq 0$ et $q \neq 1$ )
Calculons la somme $S = u_0 + u_1 + ... + u_n = 1 + q + q^2 + ... + q^n$ .

On peut écrire :

Par soustraction membre à membre, on obtient :

**Cas général :** Soit $(u_n)$ une suite géométrique de raison $q$ ( $q \neq 0$ , $q \neq 1$ ) .
Calculons la somme $S = u_4 + u_5 + ... + u_8$

On a $S =$

Ainsi $S =$

**Propriété :**

Pour calculer la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q$ , on applique la formule suivante :

**Exemple :**
Soit $(v_n)$ la suite géométrique définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ , par $v_n = 2^n$ . Calculer $S_n = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n$.

On a