PRODUIT SCALAIRE ET TRIGONOMÉTRIE

1) PRODUIT SCALAIRE : rappel

- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan . *Ce n'est pas une multiplication !*

Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est le nombre défini par l'une ou l'autre des égalités ci-dessous :

$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$ où $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont les coordonnées respectives de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ dans **un repère orthonormal** quelconque.

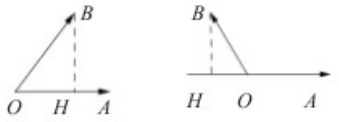
$\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos\widehat{AOB} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$

Le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit de leurs normes par le cosinus de l'angle qu'ils forment.

où O , A et B sont trois points du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

H est le projeté orthogonal de B sur (OA)

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \begin{cases} OA \times OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de même sens} \\ -OA \times OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$$



*Le produit scalaire de deux vecteurs est **un réel***

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, on pose $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

2) FORMULES D'ADDITION

Propriétés :

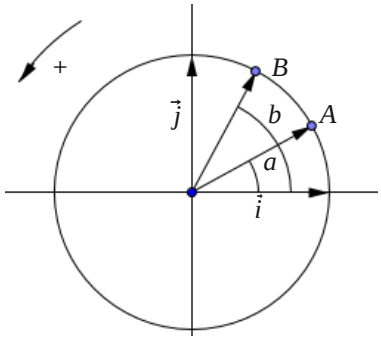
Pour tous nombres réels a et b, on a :

- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

Preuve :

- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

On considère le cercle trigonométrique C de centre O muni du repère orthonormal direct $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.
On note A et B les points de C , définis par $(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) = a$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OB}) = b$.



Les coordonnées de A et de B sont respectivement $(\cos a ; \sin a)$ et $(\cos b ; \sin b)$.

On observe sur cette figure (et sur d'autres exemples) qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est toujours $b - a$.

Calculons alors de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$:

- *avec les coordonnées* : $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- *en utilisant* $\cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$: $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = OA \times OB \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 1 \times 1 \times \cos(b-a) = \cos(a-b)$

Ainsi $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Il suffit d'écrire

$\cos(a+b) = \cos(a-(-b)) = \cos(a)\cos(-b) + \sin(a)\sin(-b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

- $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$

Il suffit d'écrire $\sin(a+b)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(a+b)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-a\right)-b\right)=\ldots$

- $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$

Il suffit d'écrire $\sin(a-b)=\sin(a+(-b))=\ldots$

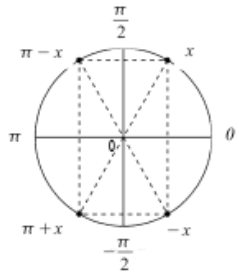
Exemple :

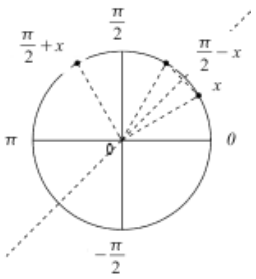
En remarquant que $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, calculer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Rappel :





- $\cos(-x)=\cos x$

La fonction cosinus est paire

- $\cos(\pi-x)=-\cos x$
- $\cos(\pi+x)=-\cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$

- $\sin(-x)=-\sin x$

La fonction sinus est impaire

- $\sin(\pi-x)=\sin x$
- $\sin(\pi+x)=-\sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$

3) FORMULES DE DUPLICATION ET DE LINÉARISATION

FORMULES DE DUPLICATION *FORMULES DE LINEARISATION*

Propriétés :

Pour tout nombre réel a, on a :

- $\sin 2a=2\sin a\cos a$
- $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$
  $=2\cos^2 a-1$
  $=1-2\sin^2 a$

- $\cos^2 a=\frac{1+\cos(2a)}{2}$
- $\sin^2 a=\frac{1-\cos(2a)}{2}$

Preuve :

En prenant $b=a$, dans les formules précédentes on obtient $\sin 2a=2\sin a\cos a$ et $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$.

En utilisant la relation $\cos^2 a+\sin^2 a=1$, on obtient $\cos 2a=2\cos^2 a-1$ et $\cos 2a=1-2\sin^2 a$

On en déduit les deux dernières formules.