PRODUIT SCALAIRE ET TRIGONOMÉTRIE

1) PRODUIT SCALAIRE : rappel

- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan . *Ce n'est pas une multiplication !*

Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est le nombre défini par l'une ou l'autre des égalités ci-dessous :

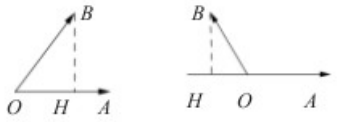
$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$ où $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont les coordonnées respectives de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ dans **un repère orthonormal** quelconque.

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos\widehat{AOB} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$

Le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit de leurs normes par le cosinus de l'angle qu'ils forment.

où O , A et B sont trois points du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

H est le projeté orthogonal de B sur (OA)



$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \begin{cases} OA \times OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de même sens} \\ -OA \times OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$$

*Le produit scalaire de deux vecteurs est **un réel***

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, on pose $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

2) FORMULES D'ADDITION

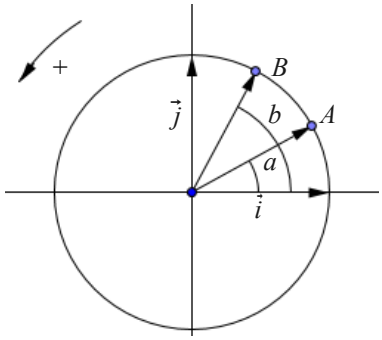
Propriétés :

Pour tous nombres réels a et b, on a :

- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

Preuve :

- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$



On considère le cercle trigonométrique C de centre O muni du repère orthonormal direct $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.
On note A et B les points de C , définis par $(\vec{i}\,,\overrightarrow{OA}) = a$ et $(\vec{i}\,,\overrightarrow{OB}) = b$.

Les coordonnées de A et de B sont respectivement

On observe sur cette figure (et sur d'autres exemples) qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OB})$ est toujours

Calculons alors de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$:

- *avec les coordonnées* :
- *en utilisant* $\cos(\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OB})$:

Ainsi

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Il suffit d'écrire

$\cos(a+b) =$

- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

Il suffit d'écrire $\sin(a+b) =$

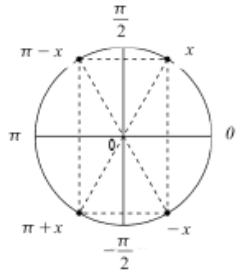
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

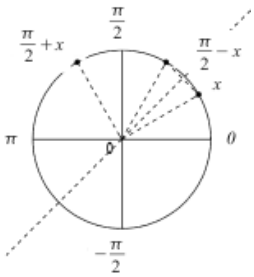
Il suffit d'écrire $\sin(a-b) =$

Exemple :

En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Rappel :





- $\cos(-x) = \cos x$

La fonction cosinus est paire

- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

- $\sin(-x) = -\sin x$

La fonction sinus est impaire

- $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

3) FORMULES DE DUPLICATION ET DE LINÉARISATION

FORMULES DE DUPLICATION *FORMULES DE LINEARISATION*

Propriétés :

Pour tout nombre réel a , on a : • $\sin 2a = 2\sin a \cos a$ • $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ $= 2\cos^2 a - 1$ $= 1 - 2\sin^2 a$	• $\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$ • $\sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$

Preuve :

En prenant , dans les formules précédentes on obtient $\sin 2a = 2\sin a \cos a$ et $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$.

En utilisant la relation , on obtient $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ et $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$

On en déduit les deux dernières formules.