EXEMPLES DE LOIS À DENSITÉ

Il existe des variables aléatoires non discrètes, qui prennent toutes les valeurs d'un intervalle de $\mathbb{R}$. (borné ou non).

Exemples : Le temps d'attente à un arrêt de bus ; la durée de vie d'un transistor ; la distance du point d'impact au centre d'une cible……

On s'intéresse alors à des événements du type : " X prend ses valeurs dans l'intervalle I " .

1) LOI UNIFORME SUR [a;b]

Définition :

Soit $[a\,;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (avec $a \neq b$)

- Une variable aléatoire X suit **la loi uniforme** sur $[a\,;b]$ si pour tout intervalle I inclus dans $[a\,;b]$, la probabilité de l'événement « $X \in I$» est l'aire du domaine $\{\ M(x\,;y)\ ;\ x \in I$ et $x \leqslant y \leqslant f(x)\}$, où f est la fonction constante définie sur $[a\,;b]$ par $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$.

En particulier, pour tout intervalle $[c\,;d]$, tel que $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$, on a :

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = P(X \in [c\,;d]) = \int_c^d \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t$$

- La fonction définie sur $[a\,;b]$ par $x \longmapsto \dfrac{1}{b-a}$ est appelée **fonction de densité** de la loi uniforme sur $[a\,;b]$

De façon plus générale :

Pour une variable aléatoire X **à densité** (continue ou absolument continue) sur un intervalle $[a\,;b]$ de $\mathbb{R}$, la fonction de densité f vérifie :
- f positive sur $[a\,;b]$
- f est continue (sauf peut-être en quelques points) sur $[a\,;b]$
- $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 1$ (L'aire sous la courbe est $P(\Omega) = 1$)

On peut étendre la définition à $\mathbb{R}$ en posant $f(x) = 0$ pour tout x n'appartenant pas à $[a\,;b]$.

Propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant **la loi uniforme** sur $[a\,;b]$.
Pour tout intervalle $[c\,;d]$, tel que $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$, on a :

$$P(X \in [c\,;d]) = \frac{d-c}{b-a}$$

Cette formule est à rapprocher de la formule :

$$\frac{\textit{Nombre de cas favorables}}{\textit{Nombre de cas possibles}}$$

vue dans les situations d'équiprobabilité en nombre fini.

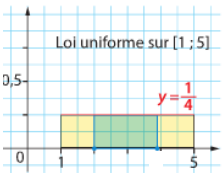
Remarques :

- La probabilité $P(X \in [c\,;d])$ est proportionnelle à l'amplitude de l'intervalle $[c\,;d]$.
- $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 1$ ($[a\,;b]$ correspond à l'univers)
- Pour tout $m \in [a\,;b]$, on a $P(X = m) = P(m \leqslant X \leqslant m) = 0$
  La probabilité que X prenne une valeur isolée de I est nulle.
- On en déduit que pour tous réels c et d de $[a\,;b]$, on a :
  $P(X \in [c\,;d]) = P(X \in [c\,;d[) = P(X \in]c\,;d]) = P(X \in]c\,;d[)$ et $P(X > c) = P(X \geqslant c)$, etc …

Exemple :

$P(X \in [1\,;2]) = P(X \in]4\,;5[) = \dfrac{1}{4}$

Si $c \in [2\,;5]$, $P(X \in [2\,;c]) = \dfrac{c-2}{4}$



Définition :

L'espérance d'une variable aléatoire à densité f sur $[a\,;b]$ est définie par $E(X) = \int_a^b t\ f(t)\,\mathrm{d}t$

Cette définition constitue un prolongement dans le cadre continu de l'espérance d'une variable aléatoire discrète.

Définition et propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a\,;b]$.

L'espérance de X est $E(X)=\int_a^b t\times\frac{1}{(b-a)}\,\mathrm{d}t$

On a $E(X)=\frac{a+b}{2}$

Remarque :

Ce résultat peut-être interprété de la façon suivante : lorsqu'une expérience aléatoire faisant intervenir une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $[a\,;b]$ est répétée un très grand nombre de fois, la moyenne des valeurs prises par X se rapproche de $\frac{a+b}{2}$ qui est le centre le l'intervalle $[a\,;b]$.

Par analogie avec la démarche conduisant à la définition de l'espérance de X, on définit la variance de X par :

Définition :

La variance d'une variable aléatoire à densité f sur $[a\,;b]$ est définie par $V(X)=\int_a^b t^2 f(t)\,\mathrm{d}t-(E(X))^2$

L'écart type est définie par $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

Définition et propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a\,;b]$.

La variance de X est $V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$

2) LOI EXPONENTIELLE

Définition :

Soit λ un réel strictement positif.

La **loi exponentielle de paramètre** λ est la loi de probabilité ayant pour densité la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f : t \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

Propriétés :

Soit X une variable aléatoire suivant la **loi exponentielle de paramètre** λ **(**$\lambda \in \mathbb{R}_+^*$**)**.

- Pour tout intervalle $[c\,;d]$, tel que $0\leqslant c\leqslant d$, on a :

$$P(X\in[c\,;d])=P(c\leqslant X\leqslant d)=\int_c^d \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-\lambda c}-\mathrm{e}^{-\lambda d}$$

- Pour tout réel $a\geqslant 0$, $P(X\leqslant a)=P(X<a)=1-\mathrm{e}^{-\lambda a}$
- Pour tout réel $a\geqslant 0$, $P(X\geqslant a)=P(X>a)=1-P(X\leqslant a)=\mathrm{e}^{-\lambda a}$

Exemples : *Les démonstrations des propriétés ci-dessus sont identiques à cet exemple.*

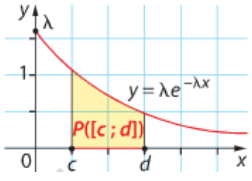
Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 2 :

$$P(1\leqslant X\leqslant 2)=\int_1^2 2\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t=\left[-\mathrm{e}^{-2t}\right]_1^2=-\mathrm{e}^{-4}+\mathrm{e}^{-2}=\frac{\mathrm{e}^2-1}{\mathrm{e}^4}\approx 0{,}117$$

$$P(X>1)=1-\int_0^1 2\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t=1-(-\mathrm{e}^{-2}+1)=\mathrm{e}^{-2}\approx 0{,}135$$

Remarques :

- On a $\lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^a \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t=1$ (en effet $\lim\limits_{a\to+\infty}(1-\mathrm{e}^{-\lambda a})=1$)
- La probabilité de l'intervalle $[c\,;d]$ s'interprète comme l'aire comprise entre la courbe représentant la densité, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=c$ et $x=d$.



- Cette loi modélise le phénomène de "mort sans vieillissement", observé par exemple pour la désintégration radioactive.

Définition et propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ **(**$\lambda \in \mathbb{R}_+^*$**)**.

L'espérance de X est $E(X) = \lim\limits_{a \to +\infty} \int_0^a t \times \lambda \, e^{-\lambda t} \, dt$

On a $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Remarque : L'espérance $\dfrac{1}{\lambda}$ est appelée la durée moyenne de vie de la variable aléatoire X.

3) LOI NORMALE

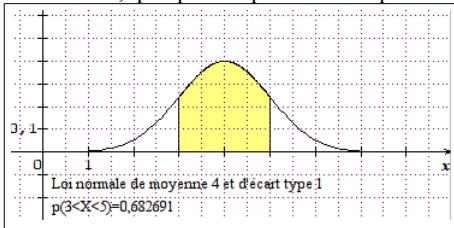
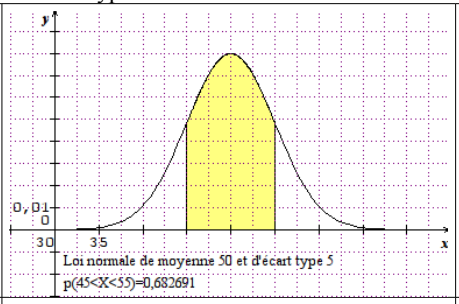
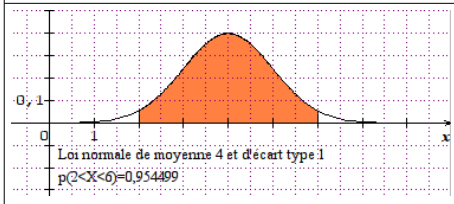
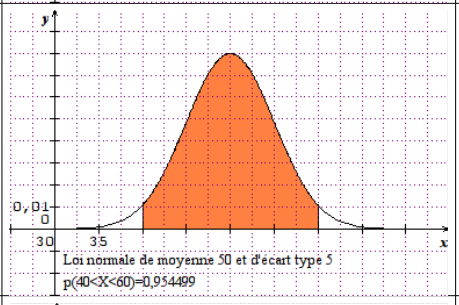
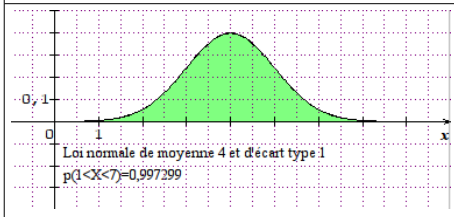
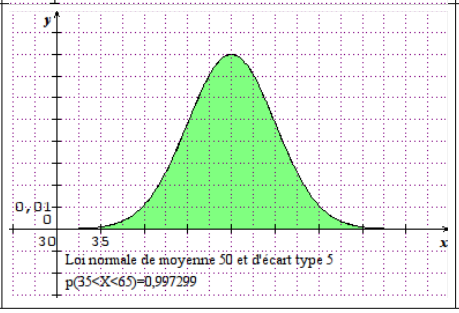
Définition :

Quand un phénomène aléatoire dont la moyenne est μ et l'écart type σ présente l'allure d'une courbe en cloche symétrique, on choisit très souvent pour modéliser ce phénomène par une densité adéquate, la densité d'une loi normale d'espérance μ et d'écart type σ.
On dit que la variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance μ et d'écart type σ et on note X suit $N(\mu ; \sigma)$.

La formule de la densité d'une loi normale $N(\mu ; \sigma)$ est très complexe : $f(x) = \dfrac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

Dans la pratique, on ne l'utilise pas, et on utilise des logiciels.
Par exemple, le logiciel « *Sine Qua Non* » nous permet de tracer les densités et de calculer des probabilités.

On constate, que quelles que soient l'espérance et l'écart type :

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>$P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0{,}68$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>$P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>$P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$</td>
</tr>
</table>

Remarques :

- L'espérance correspond à l'abscisse du sommet de la courbe.
- Plus l'écart type est important, plus la courbe est étalée.

Propriété : ***Approximation de la loi binomiale par une loi normale***

Si la variable aléatoire X suit une loi binomiale $B(n ; p)$, alors son espérance est $E(X) = np$ et son écart type est $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Si $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$, alors la loi binomiale peut être approchée par une loi normale de même espérance et de même écart type, $N(np ; \sqrt{np(1-p)})$