LOGARITHME

1) DÉFINITION

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$; elle admet donc des primitives sur cet intervalle.
Parmi celles-ci, on choisit celle qui s'annule pour $x=1$.

Définition :

On appelle **fonction logarithme népérien** la primitive notée ln sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule pour $x=1$.
On note :

On écrit souvent $\ln x$ au lieu de $\ln(x)$

Remarque :
La fonction ln est une fonction nouvelle . Ce n'est ni une fonction polynôme, ni une fonction rationnelle, ni une fonction circulaire … mais d'après sa définition, on peut dire que :

Propriété :

-
-

On note e le nombre réel tel que $\ln(e)=1$. On a e $\approx 2{,}718$ (à 10^{-2} près)

2) ÉTUDE DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{x}>0$. On en déduit la propriété suivante :

Propriété :

La fonction ln est

La croissance de la fonction ln est lente.
Par exemple : $\ln(10^8) \approx 18{,}42$

Conséquences :

Pour tous réels a et b strictement positifs on a :
- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a=b$
- $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a<b$
- $\ln a \leqslant \ln b \Leftrightarrow a \leqslant b$
- $a>1 \Leftrightarrow \ln a>0$
- si $0<a<1$ alors $\ln a<0$

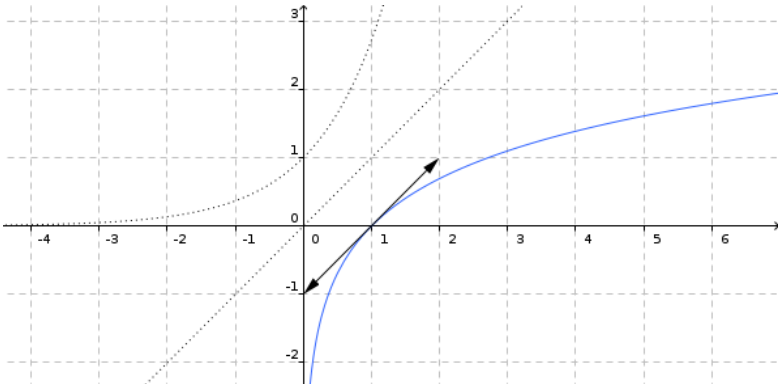
Propriété :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

Tableau de variations :

x	
ln	

Représentation graphique :



3) PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

Propriété : Relation fonctionnelle

Pour tous réels a et b strictement positifs on a :
On peut généraliser cette propriété à plusieurs nombres.

Exemple :

- $\ln(21) =$
- $\ln\left(7 \times \frac{1}{7}\right) = \ln(7) + \ln\left(\frac{1}{7}\right) \Leftrightarrow$
- $\ln\left(\frac{3}{7}\right) =$

On généralise facilement les exemples ci-dessus et on en déduit les propriétés suivantes :

Propriétés :

Pour tous réels a et b strictement positifs, on a :

- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) =$
- $\ln\left($ b

- $\ln(7) =$
- $\ln(4^3) =$
- $\ln(4^{-3}) =$

En généralisant, on en déduit que :

Propriétés :

Pour tout réel a strictement positif, on a :

- $\ln(\sqrt{a}) =$
- pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\ln(a^n)$

4) DÉRIVÉES ET PRIMITIVES

Propriété :

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

- La fonction $x \longmapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$, on a :
- La fonction $x \longmapsto \ln(u(x))$ est une primitive sur I de la fonction $x \longmapsto$

Exemple : Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $\ln(\sqrt{x})$

5) LOGARITHME DÉCIMAL

La fonction logarithme népérien est particulièrement intéressante du fait de sa propriété de transformation d'un produit en somme. Mais comme on utilise, pour écrire les nombres, le système décimal, on lui préfère parfois une autre fonction possédant la même propriété de transformation de produit en somme mais prenant la valeur 1 lorsque $x = 10$ (et donc la valeur 2 lorsque $x = 100$, la valeur 3 lorsque $x = 1000$ etc...)
Cette fonction sera appelée fonction logarithme décimal ou fonction logarithme de base 10.

Définition :

On appelle fonction logarithme décimal et on note log la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

On a :

$\log 1 =$ et $\log 10 =$

La fonction logarithme décimal étant définie par $\log x = k \times \ln x$ avec $k = \dfrac{1}{\ln 10}$, on retrouve facilement les mêmes propriétés algébriques que la fonction logarithme népérien :

Propriétés :

- Pour tous réels a et b strictement positifs on a :
  $\log(a \times b) = \log a + \log b$; $\log \dfrac{1}{a} = -\log a$; $\log \dfrac{a}{b} = \log a - \log b$; $\log \sqrt{a} = \dfrac{1}{2} \log a$
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\log a^n = n \log a$

Remarques :

- Il est de même facile d'étudier ses variations et de donner sa courbe représentative.
- Soit a un réel strictement positif tel que $a \neq 1$.
  On définit de manière analogue la fonction logarithme de base a, notée $\log_a$:

$$\log_a :]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{\ln x}{\ln a}$$