LIMITES DE FONCTIONS

1) LIMITE D'UNE FONCTION À L'INFINI

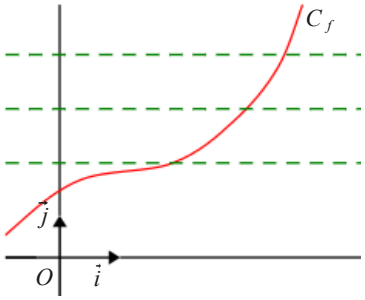
A) LIMITE INFINIE À L'INFINI

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a\,;+\infty[$ où a est un réel.
Intuitivement, dire que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, signifie que lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$, ***« les nombres $f(x)$ correspondants finissent par être aussi grands que l'on veut »***.

On note :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$



Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grande, la courbe C_f finit par se situer au dessus de n'importe quelle droite horizontale.

Remarques :

- De manière plus mathématique (moins intuitive …) :
  Tout intervalle de la forme $]M\,;+\infty[$ finit par contenir toutes les valeurs $f(x)$. On écrit aussi :

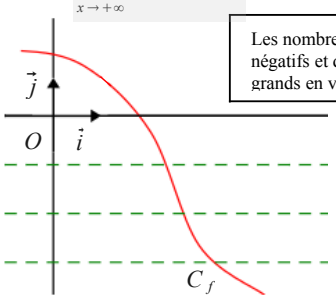
  Pour tout réel $M>0$, il existe un réel m tel que, si $x>m$, alors $f(x)\in]M\,;+\infty[$

- On dit aussi que la fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Exemples à connaître : $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$

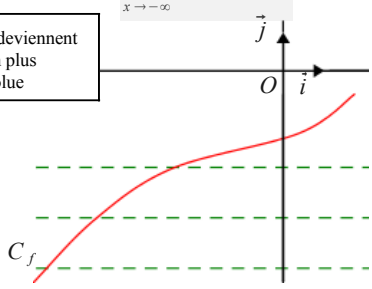
On définit de la même façon …

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

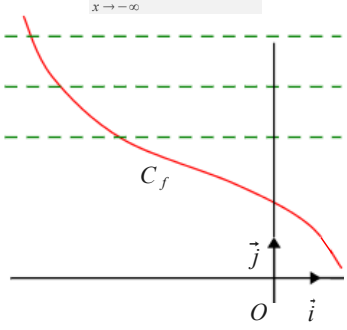


Les nombres $f(x)$ deviennent négatifs et de plus en plus grands en valeur absolue

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$



Dans ces deux cas, f est définie sur un intervalle de la forme $]-\infty\,;b]$

Remarque :

Dans la pratique, on peut utiliser la remarque suivante : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(-x)$

B) LIMITE FINIE À L'INFINI ET ASYMPTOTE HORIZONTALE

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a\,;+\infty[$ où a est un réel et soit L un réel donné.

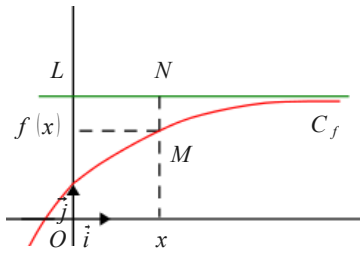
- Intuitivement, dire que f a pour limite L en $+\infty$, signifie que lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$, **« les nombres $f(x)$ correspondants viennent s'accumuler autour de L »**.

On note :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$$

- On dit que la droite d'équation $y=L$ est **asymptote horizontale** à la courbe C_f en $+\infty$.

Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, la distance MN tend vers 0. La courbe C_f se rapproche sans cesse de la droite d'équation $y=L$.



Remarque :

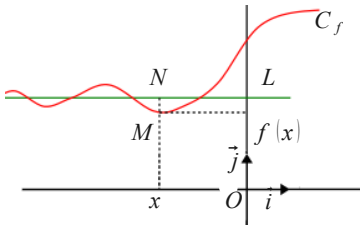
De manière plus mathématique (moins intuitive …) :
Tout intervalle ouvert contenant L finit par contenir toutes toutes les valeurs $f(x)$. On écrit aussi :

Pour tout $\varepsilon>0$ (aussi petit qu'il soit) il existe un réel m tel que, si $x>m$, alors $f(x)\in]L-\varepsilon\,;L+\varepsilon[$.

On définit de la même façon :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$

f est définie sur un intervalle de la forme $]-\infty\,;b]$



La distance MN tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$.

La droite d'équation $y=L$ est **asymptote horizontale** à la courbe C_f en $-\infty$.

Exemples à connaître :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^3}=0$

La courbe représentant la fonction $x\longmapsto\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ admet l'axe des abscisses comme asymptote en $+\infty$; les trois autres courbes admettent cet axe comme asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$.

Remarque :
Une fonction n'a pas forcément une limite finie ou infinie quand x tend vers $+\infty$. (Par exemple $x\longmapsto\sin x$, $x\longmapsto\cos x$ …)

2) LIMITE INFINIE D'UNE FONCTION EN *a* (avec *a* réel) ET ASYMPTOTE VERTICALE

Lorsque que l'on définit la limite d'une fonction f en un réel a , on considère que :

- $a\in D_f$
- ou a est une borne de D_f

Définition :

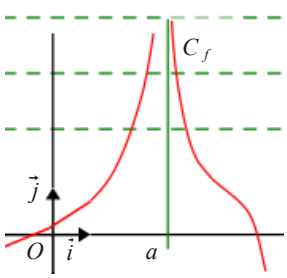
Soit f une fonction.

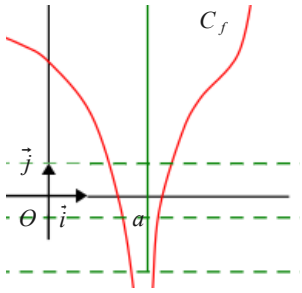
- Intuitivement, dire que f a pour limite $+\infty$ en a , signifie que lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a, ***« les nombres $f(x)$ correspondants finissent par être aussi grands que l'on veut ».***

On note : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$

On définit de la même façon $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$

- On dit que la droite d'équation $x=a$ est **asymptote verticale** à la courbe C_f.

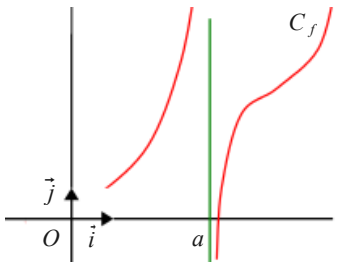




Lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a , la courbe Cf finit par se situer au dessus (et en dessous pour la deuxième figure) de n'importe quelle droite horizontale .

Remarque :
Il arrive souvent qu'on soit amené à définir des limites *«d'un seul côté de a»*.
Naturellement, on introduit les notions de **limite à droite en *a*** et de **limite à gauche en *a*** et on note :

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ ou encore $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)$



Dans ce cas

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$

Exemples :

- $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^3}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x^3}=-\infty$

Les courbes représentant ces fonctions admettent l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.

3) OPÉRATIONS SUR LES LIMITES *(admis)*

La plupart des théorèmes qui suivent sont naturels mais … comme souvent en math, il y a quelques cas particuliers.

Par convention et pour simplifier :

- on note $\lim f(x)$ et $\lim g(x)$ les limites de f et de g , toutes les deux en a , en $+\infty$ ou en $-\infty$
- on note par un point d'interrogation (?) les cas où il n'y a pas de conclusion générale.
  On dit qu'il s'agit de cas de formes indéterminées . Ces cas nécessiteront une étude particulière chaque fois qu'ils se présenteront.

- $k\,f(x)$ (où k est un réel donné)

$\lim f(x)$	L	$+\infty$	$-\infty$
$\lim kf(x)$ (avec $k>0$)	kL	$+\infty$	$-\infty$
$\lim kf(x)$ (avec $k<0$)	kL	$-\infty$	$+\infty$

Exemple : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g : x \longmapsto -\frac{2}{x^2}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $g(x) = -2\,f(x)$ avec $f : x \longmapsto \frac{1}{x^2}$

Comme $-2<0$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$

- $f(x)+g(x)$

$\lim f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim (f(x)+g(x))$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Exemple : Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h : x \longmapsto \sqrt{x} - \frac{2}{x^2}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $h(x) = f(x)+g(x)$ avec $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ et $g : x \longmapsto -\frac{2}{x^2}$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

- $f(x)\times g(x)$

$\lim f(x)$	L	$L>0$	$L>0$	$L<0$	$L<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim (f(x)\times g(x))$	$L\times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Exemple : Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ par $h : x \longmapsto \left(2+\frac{1}{x}\right)x^2$. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $h(x) = f(x)\times g(x)$ avec $f : x \longmapsto 2+\frac{1}{x}$ et $g : x \longmapsto x^2$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$

- $\frac{1}{f(x)}$

$\lim f(x)$	$L\neq 0$	0 en restant positive	0 en restant négative	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim \frac{1}{f(x)}$	$\frac{1}{L}$	$+\infty$	$-\infty$	0

Remarques :

- « 0 en restant négative ou positive » signifie que f garde un signe constant au voisinage de a , en $+\infty$ ou en $-\infty$ suivant les cas.
- On note, par exemple, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$ pour indiquer que f tend vers 0 en restant positive quand x tend vers $+\infty$.
- On note, par exemple, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^-$ pour indiquer que f tend vers 0 en restant négative quand x tend vers $-\infty$.

Exemple : Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}-\{2\}$ par $h : x \longmapsto \frac{1}{2x-4}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

Pour tout $x \neq 2$, on a $h(x) \equiv \frac{1}{f(x)}$ avec $f : x \longmapsto 2x-4$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$

4) LIMITE D'UNE FONCTION COMPOSÉE *(admis)*

Propriété :

Soit f, g et h trois fonctions telles que $f(x) = g(h(x))$.
Chacune des lettres a, b et c désigne soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Si $\lim\limits_{x\to a} h(x) = b$ et si $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$

Dans la pratique, on peur rédiger comme ci-dessous.

Exemple : Soit $f(x) = (\sqrt{x}+2)^5$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Posons $X = \sqrt{x}+2$. On a alors $f(x) = X^5$
$\lim\limits_{x\to+\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} X^5 = +\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.