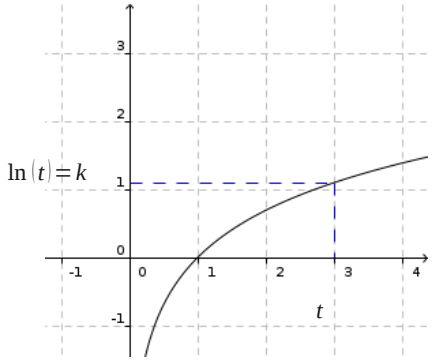
FONCTIONS EXPONENTIELLES ET PUISSANCES

1) DÉFINITION



Nous avons déjà étudier la fonction logarithme népérien.
Nous avons vu que lorsque x varie dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$, la fonction ln est strictement croissante.
En particulier, il existe un nombre strictement positif unique tel que $\ln(x)=0$: c'est $x=1$.
De même, il existe un nombre strictement positif unique tel que $\ln(x)=1$: c'est $x=e$.

Plus généralement, pour tout réel k, il existe un unique réel $t\in]0\,;+\infty[$ tel que $\ln t=k$.

Ce réel t est noté $\exp(k)$. On lit « exponentielle de k»

Propriété et définition :

Pour tout réel x, on appelle exponentielle de x et on note $\exp(x)$ l'unique réel de $]0\,;+\infty[$ dont le logarithme népérien est x.
On appelle fonction exponentielle la fonction $\exp : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\longmapsto \exp(x)$

$$\begin{cases}\exp(x)=y\\ x\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\ln y\\ y\in]0\,;+\infty[\end{cases}$$

Remarques :
- $\exp(0)$ est le nombre dont le logarithme népérien est 0, donc
- $\exp(1)$ est le nombre dont le logarithme népérien est 1, donc . $e\approx 2{,}718$ (à 10^{-3} près)
- Pour tout entier relatif n, on a $n=\ln(e^n)$ et par conséquent

Notation:
On conviendra d'étendre cette notation pour un réel x quelconque.
On notera alors : $\exp : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\longmapsto e^x$

On a donc:

Remarque :
La notation e^2 a une double signification : soit le nombre e élevé au carré, soit le nombre $\exp(2)$. (*Ces deux nombres étant égaux*)
Par contre la notation e^{π} ne peut désigner que le nombre $\exp(\pi)$.

2) ÉTUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

Propriété :

- Pour tout réel x, on a
- Pour tout réel strictement positif x, on a

Propriétés :

-
-

Propriété :

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La fonction exponentielle croît très vite (par exemple : $e^{50}\approx 5\times 10^{21}$)

Conséquences :

Pour tous réels a et b
- $a=b\Leftrightarrow e^a=e^b$
- $a<b\Leftrightarrow e^a<e^b$
- $a\leqslant b\Leftrightarrow e^a\leqslant e^b$
- $a>0\Leftrightarrow e^a>1$
- $a<0\Leftrightarrow 0<e^a<1$

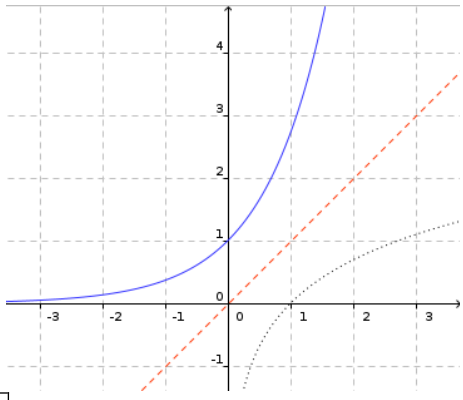
Propriétés :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=$

Tableau de variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
exp		

Représentation graphique :



Remarque :
Dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction exponentielle et celle de la fonction logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

3) PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

Propriété : relation fonctionnelle

Pour tous réels a et b, on a :

$$e^{a+b} = e^a e^b$$

On peut généraliser cette propriété à plusieurs nombres.

La fonction exponentielle est donc une fonction transformant une somme en un produit.

Preuve :
Soit a et b deux réels quelconques.
On a : $\ln\left(e^a \times e^b\right) = \ln\left(e^a\right) + \ln\left(e^b\right) = a + b$

On en déduit : $e^{\ln\left(e^a \times e^b\right)} = e^{a+b} \Leftrightarrow e^{a+b} = e^a e^b$

Exemples :

- $e^2 e^7 =$
- $e^{\ln(8)+1} =$
- $e^{x+y+z} =$
- $e^{-3} \times e^3 =$
- $e^{x-3} =$
- $e^{3x} =$

On généralise facilement les exemples ci-dessus et on en déduit les propriétés suivantes :

Propriétés :

Pour tous réels a et b, on a :

- $e^b \neq 0$ et $e^{-b} =$
- $e^{a-b} =$
- Si n est un entier relatif : $e^{na} =$

4) DÉRIVÉES ET PRIMITIVES

On admet que la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

En dérivant chacun des membres de l'égalité $\ln\left(e^x\right) = x$ vraie pour tout réel x et en utilisant la formule $\left(\ln u\right)' = \dfrac{u'}{u}$, on obtient :

$\dfrac{\left(e^x\right)'}{e^x} = 1$, d'où $\left(e^x\right)' = e^x$.

Propriété :

La fonction exponentielle $f : x \longmapsto e^x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a $f'(x) = e^x$

La fonction exponentielle est égale à sa fonction dérivée et on en déduit facilement une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction exponentielle.

Propriété :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

La fonction $f : x \longmapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$, on a

Exemple : Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\cos(x)}$

Propriété :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Une primitive sur I de $f : x \longmapsto u'(x)\,e^{u(x)}$ est

Exemple :

Déterminer les primitives de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h : x \longmapsto (4x+6)\,e^{x^2+3x}$.

5) PUISSANCES D'EXPOSANTS REELS

A) LA NOTATION a^x

Si n est un entier naturel, la notation a^n a un sens pour tout réel a . Dans le cas où n est un entier négatif, la notation a^n a un sens pour tout réel a non nul car $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$. On se propose de donner un sens à la notation a^b quand b est un réel quelconque.

Définition :

Soit x un réel et a un réel strictement positif.
a exposant x (ou a puissance x) est le réel noté a^x défini par :

Cette définition est cohérente avec celle de a^n lorsque a est un réel strictement positif et n un entier . En effet :

Exemple :

$3{,}4^{2{,}7} =$. Avec la calculatrice, on obtient

Les règles de calcul des exposants entiers s'étendent aux exposants réels :

$a^m\,a^n =$; $(a\times b)^m =$; $(a^m)^n =$; $a^{-m} =$ (avec $a \neq 0$) ; $\frac{a^m}{a^n} =$ (avec $a \neq 0$)

B) LES FONCTIONS EXPONENTIELLES DE BASE a

Définition :

Soit a un réel strictement positif.
On appelle **fonction exponentielle de base a** la fonction notée $\exp_a$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto a^x = e^{x \ln a}$$

- La fonction exponentielle de base 1, $\exp_1 : x \longmapsto 1^x$ est constante et vaut 1.
- La fonction exponentielle de base e , $\exp_e : x \longmapsto e^x$ est la fonction exponentielle déjà étudiée.

C) LA FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE 10

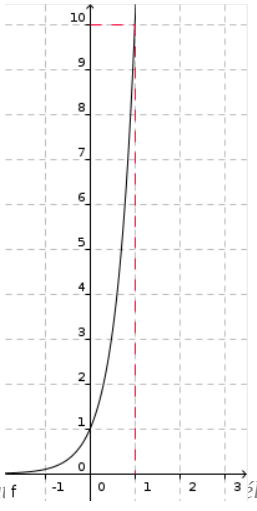
Pour tout entier naturel n, l'équation $\log(x) = n$ a une solution unique $x = 10^n$.
Plus généralement, pour tout réel k, il existe un unique réel $t \in]0\,;+\infty[$ tel que $\log(t) = k$.
Ce réel est $t = 10^k$.

Définition :

On appelle **fonction exponentielle de base 10** la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 10^x$.

La fonction $f : x \longmapsto 10^x$ est strictement croissante.

On peut écrire $f(x) = 10^x =$

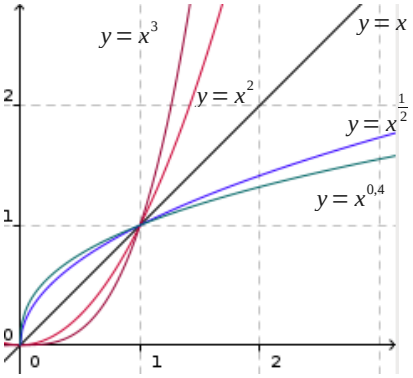


6) LES FONCTIONS PUISSANCES

Définition :

Soit a un nombre réel strictement positif.

- Pour tout réel strictement positif, on note x^a le nombre $e^{a\ln(x)}$
- On appelle **fonction puissance** la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x^a=e^{a\ln(x)}$



Exemple :

Les fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par $x\longmapsto x^2$, $x\longmapsto x^3$, $x\longmapsto x^{\frac{1}{2}}$, $x\longmapsto x^{0,4}$

Remarque :

Les fonctions $x\longmapsto x^a$ sont strictement croissantes.

L'allure de la courbe représentative dépend la position de a par rapport à 1

7) COMPARAISON DES COMPORTEMENTS À L'INFINI

Propriété :

Pour tout entier $n>0$, on a ;

Remarque : On peut retenir :

-
-