ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1) LA NOTION D'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Définitions :

- **Une équation différentielle** est une équation où l'inconnue est une fonction f.
  L'inconnue est souvent notée y et les dérivées successives sont notées y', y'' …
- Une **équation du premier ordre** est une équation qui ne contient que la fonction et au moins sa fonction dérivée.
- Une **équation du second ordre** est une équation qui ne contient que la fonction, sa fonction dérivée et au moins sa dérivée seconde.
- Quand une équation est de la forme $y + ay + by'' + ... = 0$, on dit qu'elle est **linéaire**.

Exemple : Si on monte en série une diode, une bobine et une résistance, l'équation différentielle qui caractérise l'intensité est $i' + \frac{R}{l} i = 0$

Remarque :
On a déjà rencontré des équations différentielles.
En effet, déterminer les primitives d'une fonction g revient à résoudre l'équation différentielle $y' = g(x)$

2) ÉQUATION LINÉAIRE DU PREMIER ORDRE

Une équation linéaire du premier ordre **homogène** est une équation linéaire de la forme $y' + ay = 0$ (où $a \in \mathbb{R}$)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' + ay = 0$ d'inconnue la fonction y, c'est trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que pour tout réel x, $f'(x) + af(x) = 0$.

Pour simplifier, les fonctions considérées seront toujours définies sur $\mathbb{R}$. On ne le répétera donc pas à chaque fois.

Propriété : *Équation linéaire du premier ordre homogène*

Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ (où $a \in \mathbb{R}$) sont les fonctions de la forme $y(x) = k\,e^{-ax}$ où $k \in \mathbb{R}$

Exemple : Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' + 5y = 0$.

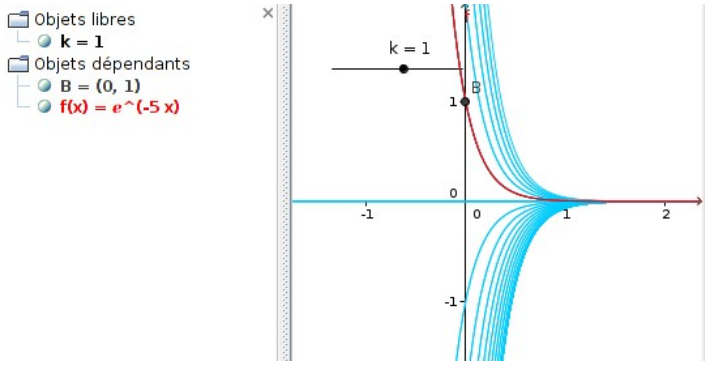
Les solutions de l'équation différentielle $y' + 5y = 0$ sont les fonctions de la forme $y(x) = k\,e^{-5x}$ où $k \in \mathbb{R}$

Remarque :
L'équation différentielle $y' + 5y = 0$ peut aussi se noter $f'(x) + 5f(x) = 0$ ou encore $\frac{dy(x)}{dx} + 5y(x) = 0$.
Cette dernière notation est très utilisée dans les différents domaines des sciences physiques.

Avec GeoGebra, on a représenté les solutions pour différentes valeurs de k : $k = 10$, $k = 9$, …

L'équation admet une infinité de solutions, autant que de valeurs différentes de k.

On peut observer qu'il n'y a qu'une seule courbe telle que $f(0) = 1$.



Propriété : *Solution vérifiant une condition initiale donnée*

Pour tout couple de réel $(x_0 ; y_0)$, l'équation $y' + ay = 0$ (où $a \in \mathbb{R}$) admet une solution et une seule telle que $f(x_0) = y_0$

Exemple : Déterminer la solution de l'équation différentielle $y' + 5y = 0$ telle que $f(0) = 5$

Il suffit de résoudre l'équation $k\,e^{-5\times 0} = 5$. On trouve $k = 5$

L'unique solution est donc la fonction définie par $f(x) = 5e^{-5x}$

Propriété : *Équation linéaire du premier ordre avec second membre constant*

Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ (où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$) sont les fonctions de la forme $y(x) = k\,e^{-ax} + \frac{b}{a}$ où $k \in \mathbb{R}$

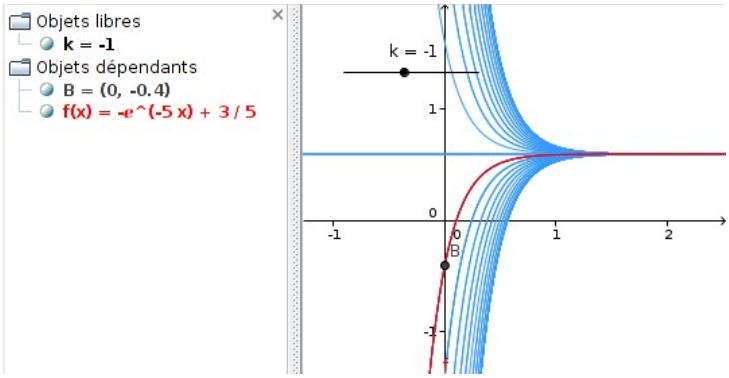
Exemple : Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' + 5y = 3$.

Les solutions de l'équation différentielle $y' + 5y = 3$ sont les fonctions de la forme $y(x) = k\,e^{-5x} + \frac{3}{5}$ où $k \in \mathbb{R}$

Avec GeoGebra, on a représenté les solutions pour différentes valeurs de k : $k = 10$, $k = 9$, …

L'équation admet une infinité de solutions, autant que de valeurs différentes de k

On peut observer qu'il n'y a qu'une seule courbe telle que $f(0) = -0{,}4$.



Propriété : *Solution vérifiant une condition initiale donnée*

Pour tout couple de réel $(x_0 ; y_0)$, l'équation $y' + ay = b$ (où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$) admet une solution et une seule telle que $f(x_0) = y_0$

Exemple : Déterminer la solution de l'équation différentielle $y' + 5y = 3$ telle que $f(0) = 1$.

Il suffit de résoudre l'équation $k\,e^{-5\times 0} + \frac{3}{5} = 1$. On trouve $k = \frac{2}{5} = 0{,}4$

L'unique solution est donc la fonction définie par $f(x) = 0{,}4e^{-5x} + \frac{3}{5}$

3) ÉQUATION LINÉAIRE DU SECOND ORDRE

On considère uniquement les équations linéaires homogènes du second ordre du type $y'' + \omega^2 y = 0$ (où $\omega \in \mathbb{R}^*$)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ d'inconnue la fonction y, c'est trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que pour tout réel x, $f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$.

Remarque :

Dans un circuit RC en électricité, l'écriture entre la tension et l'intensité aboutit à une équation du type $U'(t) + \frac{1}{RC}U(t) = 0$

Propriété : *Un exemple d'équation linéaire du second ordre homogène*

Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ (où $\omega \in \mathbb{R}^*$) sont les fonctions de la forme

$$y(x) = k_1 \cos(\omega x) + k_2 \sin(\omega x) \text{ (où } k_1 \in \mathbb{R} \text{ et } k_2 \in \mathbb{R})$$

Exemple : Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'' + 25y = 0$.

Les solutions de l'équation différentielle $y'' + 25y = 0$ sont les fonctions de la forme $y(x) = k_1 \cos(5x) + k_2 \sin(5x)$ (où $k_1 \in \mathbb{R}$ et $k_2 \in \mathbb{R}$)

On a admis que ces fonctions sont les seules solutions possibles . Il est facile de vérifier que ces fonctions sont effectivement solutions.
Pour tout réel x, on a :

$f(x) = k_1 \cos(5x) + k_2 \sin(5x)$

$f'(x) = -5k_1 \sin(5x) + 5k_2 \cos(5x)$

$f''(x) = -25k_1 \cos(5x) - 25k_2 \sin(5x)$

$f''(x) + 25f(x) = -25k_1 \cos(5x) - 25k_2 \sin(5x) + 25(k_1 \cos(5x) + k_2 \sin(5x)) = 0$

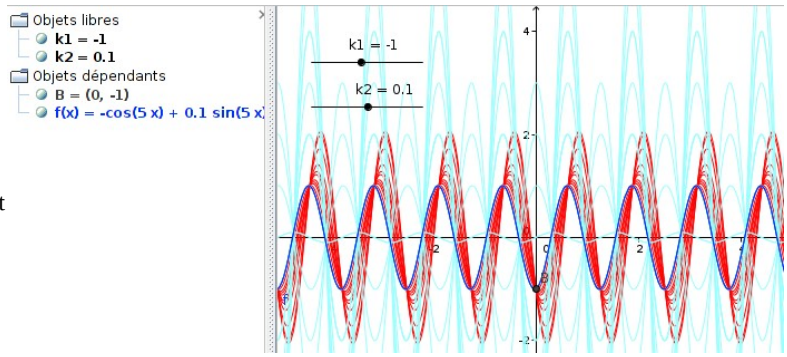
Remarque :

L'équation différentielle $y''+25\,y=0$ peut aussi se noter $f''(x)+25\,f(x)=0$ ou encore $\frac{d^2y(x)}{dx^2}+25\,y(x)=0$.

Avec GeoGebra, on a représenté les solutions pour différentes valeurs de k_1 et k_2.

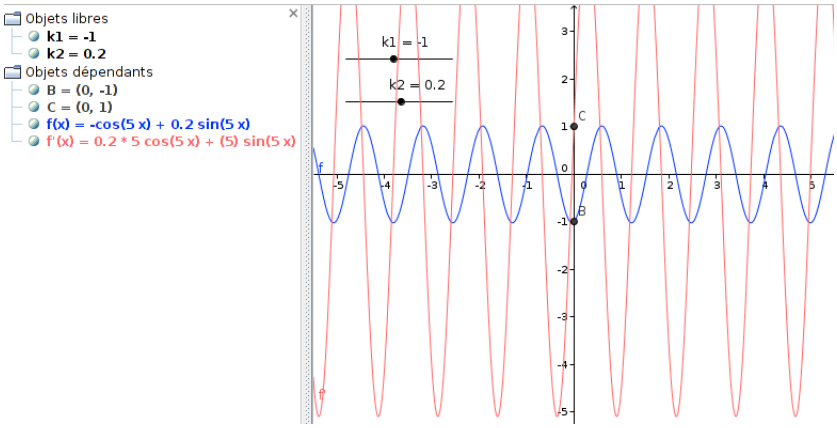
L'équation de l'exemple admet une infinité de solutions, autant que de valeurs différentes de k_1 et k_2.

Contrairement à une équation linéaire du premier ordre, on peut observer qu'il y a une infinité de courbes telles que $f(0)=-1$.



Avec GeoGebra, on a représenté les fonctions f et f'.

On peut observer qu'il n'y a qu'une seule fonction telle que $f(0)=-1$ et $f'(0)=1$.



Propriété : *Solution vérifiant des conditions initiales données*

Pour tous réels x_0, y_0 et z_0, l'équation $y''+\omega^2\,y=0$ (où $\omega\in\mathbb{R}^*$) admet une solution et une seule telle que $f(x_0)=y_0$ et $f'(x_0)=z_0$

Remarque :
Dans les problèmes liés à une expérience physique, les conditions imposées par l'expérience sont généralement les conditions à l'instant $t=0$ (Position et vitesse à l'instant $t=0$ par exemple)

Autre écriture des solutions :

Les représentations précédentes sont périodiques et ont une forme de sinusoïde . On peut donc imaginer une autre écriture des solutions.

En effet, pour faciliter l'exploitation d'une solution d'une équation différentielle du type $y''+\omega^2\,y=0$ (où $\omega\in\mathbb{R}^*$) , on est souvent amené à l'écrire sous la forme $x\longmapsto A\sin(\omega\,x+\varphi)$.

La transformation qui permet de passer d'une écriture à l'autre est admise.
Cette deuxième écriture est souvent privilégiée dans les problèmes de physique . (φ est appelé le déphasage)