# ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

## 1 ) LA NOTION D'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

**Définitions :**

- **Une équation différentielle** est une équation où l'inconnue est une fonction $f$.
  L'inconnue est souvent notée $y$ et les dérivées successives sont notées $y'$, $y''$ …
- Une **équation du premier ordre** est une équation qui ne contient que la fonction et au moins sa fonction dérivée.
- Une **équation du second ordre** est une équation qui ne contient que la fonction, sa fonction dérivée et au moins sa dérivée seconde.
- Quand une équation est de la forme $y + ay + by'' + ... = 0$, on dit qu'elle est **linéaire**.

**Exemple :** Si on monte en série une diode, une bobine et une résistance, l'équation différentielle qui caractérise l'intensité est $i' + \frac{R}{l} i = 0$

**Remarque :**
On a déjà rencontré des équations différentielles.
En effet, déterminer les primitives d'une fonction $g$ revient à résoudre l'équation différentielle $y' = g(x)$

## 2 ) ÉQUATION LINÉAIRE DU PREMIER ORDRE

Une équation linéaire du premier ordre **homogène** est une équation linéaire de la forme $y' + ay = 0$ (où $a \in \mathbb{R}$)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' + ay = 0$ d'inconnue la fonction $y$, c'est trouver toutes les fonctions $f$ dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que pour tout réel $x$, $f'(x) + af(x) = 0$.

Pour simplifier, les fonctions considérées seront toujours définies sur $\mathbb{R}$. On ne le répétera donc pas à chaque fois.

**Propriété :** *Équation linéaire du premier ordre homogène*

Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ (où $a \in \mathbb{R}$) sont les fonctions de la forme $y(x) =$

**Exemple :** Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' + 5y = 0$.

**Remarque :**

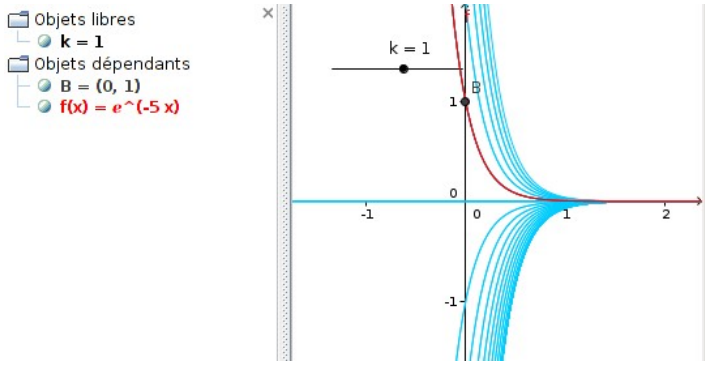
L'équation différentielle $y' + 5y = 0$ peut aussi se noter $f'(x) + 5f(x) = 0$ ou encore $\frac{dy(x)}{dx} + 5y(x) = 0$.

Cette dernière notation est très utilisée dans les différents domaines des sciences physiques.

Avec GeoGebra, on a représenté les solutions pour différentes valeurs de $k$ : $k = 10$, $k = 9$, …

L'équation admet une infinité de solutions, autant que de valeurs différentes de $k$.

On peut observer qu'il n'y a qu'une seule courbe telle que $f(0) = 1$.




**Propriété :** *Solution vérifiant une condition initiale donnée*

Pour tout couple de réel $(x_0 ; y_0)$, l'équation $y' + ay = 0$ (où $a \in \mathbb{R}$) admet une solution et une seule telle que

**Exemple :** Déterminer la solution de l'équation différentielle $y' + 5y = 0$ telle que $f(0) = 5$

**Propriété :** *Équation linéaire du premier ordre avec second membre constant*

Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ (où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$) sont les fonctions de la forme

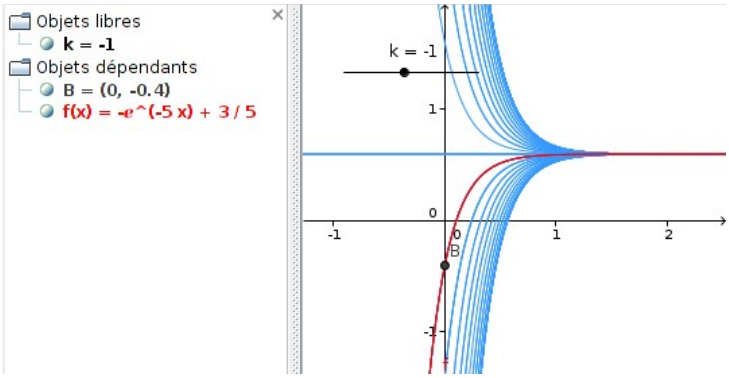
**Exemple :** Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' + 5y = 3$.

Les solutions de l'équation différentielle $y' + 5y = 3$ sont les fonctions de la forme $y(x) = k\,e^{-5x} + \frac{3}{5}$ où $k \in \mathbb{R}$

Avec GeoGebra, on a représenté les solutions pour différentes valeurs de $k$ : $k = 10$, $k = 9$, …

L'équation admet une infinité de solutions, autant que de valeurs différentes de $k$

On peut observer qu'il n'y a qu'une seule courbe telle que $f(0) = -0{,}4$.




**Propriété :** *Solution vérifiant une condition initiale donnée*

Pour tout couple de réel $(x_0 ; y_0)$, l'équation $y' + ay = b$ (où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$) admet une solution et une seule telle que

**Exemple :** Déterminer la solution de l'équation différentielle $y' + 5y = 3$ telle que $f(0) = 1$.

## 3 ) ÉQUATION LINÉAIRE DU SECOND ORDRE

On considère uniquement les équations linéaires homogènes du second ordre du type $y'' + \omega^2 y = 0$ (où $\omega \in \mathbb{R}^*$)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ d'inconnue la fonction $y$, c'est trouver toutes les fonctions $f$ dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que pour tout réel $x$, $f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$.

**Remarque :**

Dans un circuit RC en électricité, l'écriture entre la tension et l'intensité aboutit à une équation du type $U''(t) + \frac{1}{RC} U(t) = 0$

**Propriété :** *Un exemple d'équation linéaire du second ordre homogène*

Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ (où $\omega \in \mathbb{R}^*$) sont les fonctions de la forme

**Exemple :** Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'' + 25y = 0$.

On a admis que ces fonctions sont les seules solutions possibles . Il est facile de vérifier que ces fonctions sont effectivement solutions.
Pour tout réel $x$, on a :

$f(x) = k_1 \cos(5x) + k_2 \sin(5x)$

$f'(x) =$

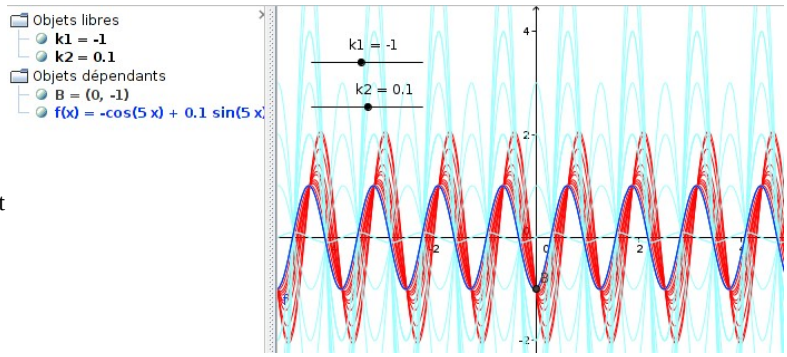
$f''(x) =$

$f''(x) + 25 f(x) =$

**Remarque :**

L'équation différentielle $y''+25\,y=0$ peut aussi se noter $f''(x)+25\,f(x)=0$ ou encore $\frac{d^2y(x)}{dx^2}+25\,y(x)=0$.

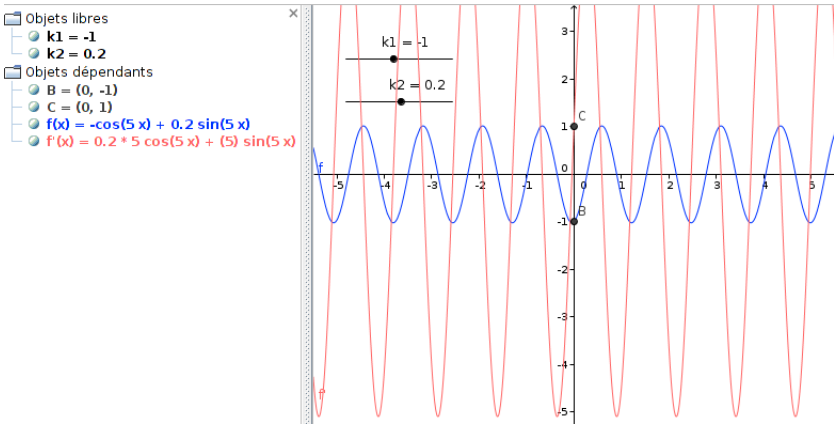
Avec GeoGebra, on a représenté les solutions pour différentes valeurs de $k_1$ et $k_2$.




L'équation de l'exemple admet une infinité de solutions, autant que de valeurs différentes de $k_1$ et $k_2$.

Contrairement à une équation linéaire du premier ordre, on peut observer qu'il y a une infinité de courbes telles que $f(0)=-1$.

Avec GeoGebra, on a représenté les fonctions $f$ et $f'$.




On peut observer qu'il n'y a qu'une seule fonction telle que $f(0)=-1$ et $f'(0)=1$.

**Propriété :** *Solution vérifiant des conditions initiales données*

Pour tous réels $x_0$, $y_0$ et $z_0$, l'équation $y''+\omega^2\,y=0$ (où $\omega\in\mathbb{R}^*$) admet une solution et une seule telle que

**Remarque :**

Dans les problèmes liés à une expérience physique, les conditions imposées par l'expérience sont généralement les conditions à l'instant $t=0$ (Position et vitesse à l'instant $t=0$ par exemple)

**Autre écriture des solutions :**

Les représentations précédentes sont périodiques et ont une forme de sinusoïde . On peut donc imaginer une autre écriture des solutions.

En effet, pour faciliter l'exploitation d'une solution d'une équation différentielle du type $y''+\omega^2\,y=0$ (où $\omega\in\mathbb{R}^*$) , on est souvent amené à l'écrire sous la forme $x\longmapsto A\sin(\omega\,x+\varphi)$.

La transformation qui permet de passer d'une écriture à l'autre est admise.
Cette deuxième écriture est souvent privilégiée dans les problèmes de physique . ($\varphi$ est appelé le déphasage)