PRIMITIVES

1) DÉFINITION

Exemple : Soit les fonction $f : x \longmapsto 2x^2+3x+5$ et $F : x \longmapsto \frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+5x+3$ définies sur $\mathbb{R}$. Quel lien existe-il entre F et f ?

On constate que pour tout réel x, $F'(x)=f(x)$. f est donc la fonction dérivée de F.
On dit que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .
Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I , telle que pour tout x dans I , $F'(x)=f(x)$.

Une fonction est souvent notée par une lettre minuscule et l'usage est de noter une primitive (si elle existe) par la majuscule associée.

Théorème :

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle, alors f admet des primitives sur cet intervalle.

2) LIEN ENTRE DEUX PRIMITIVES

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si F est une primitive de f sur I , alors f admet une infinité de primitives.
Toute autre primitive de f sur I est définie par $G(x)=F(x)+k$ où $k \in \mathbb{R}$

On dit que deux primitives d'une fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Exemple : Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f.

Les primitives de la fonction f sont les fonctions F_k définies sur $\mathbb{R}$ par $F_k : x \longmapsto \frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+5x+k$ où $k \in \mathbb{R}$

Propriété :

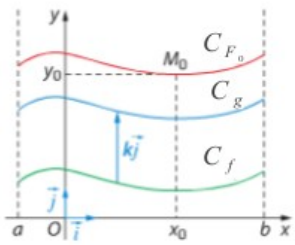
Soit f une fonction admettant des primitives sur I.
Pour tout couple de réels $(x_0 ; y_0)$ où x_0 est un réel donné dans I et y_0 est un réel quelconque, il existe une primitive et une seule F_0 de f sur I telle que $F_0(x_0)=y_0$

Exemple : Déterminer la primitive de la fonction f prenant la valeur $\frac{13}{6}$ en 1.

Il suffit de résoudre l'équation :
$F_k(1)=\frac{13}{6} \Leftrightarrow \frac{2}{3}+\frac{3}{2}+5+k=\frac{13}{6} \Leftrightarrow \frac{13}{6}+5+k=\frac{13}{6} \Leftrightarrow k=-5$
La primitive de la fonction f prenant la valeur $\frac{13}{6}$ en 1 est donc la fonction $F_{-5} : x \longmapsto \frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+5x-5$

Remarque :

Les courbes représentatives des primitives d'une fonction f se déduisent donc l'une de l'autre par des translations de vecteurs $k\vec{j}$ $(k \in \mathbb{R})$.
Une seule d'entre elles passe par le point M_0 de coordonnées $(x_0 ; y_0)$



3) CALCULS DE PRIMITIVES

Les opérations sur les fonctions dérivables et la définition d'une primitive conduisent aux résultats suivants :

- si F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I , alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.
- si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et λ un réel, alors λF est une primitive de λf sur I.

De même, les résultats connus sur les dérivées des fonctions usuelles donnent par « lecture inverse » les primitives.

Exemple :

Déterminer les primitives de la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g : x \longmapsto \frac{6}{\sqrt{x}} + x^2$.

g est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$. g admet donc des primitives sur $]0;+\infty[$.

Pour tout $x>0$, on peut écrire $g(x) = 12 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3} \times 3x^2$

On a fait apparaître les dérivées des fonctions $x \longmapsto \sqrt{x}$ et $x \longmapsto x^3$

On en déduit que les primitives de la fonction g sont les fonctions G_k définies sur $]0;+\infty[$ par $G_k : x \longmapsto 12\sqrt{x} + \frac{1}{3}x^3 + k$, où $(k \in \mathbb{R})$

Propriété :

Soit une fonction u dérivable sur un intervalle I.
Les primitives sur I des fonctions de la forme $t \longmapsto u'(t) \times (u(t))^n$, où $n \in \mathbb{N}$ sont les fonctions $t \longmapsto \frac{(u(t))^{n+1}}{n+1} + k$, où $k \in \mathbb{R}$

Remarque :

Si pour tout $x \in I$, $u(x) \neq 0$, cette formule est encore vraie pour un entier négatif différent de -1.

Exemple :

Déterminer les primitives de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h : x \longmapsto 2x(x^2+3)^2$

h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. h admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $h(x) = u'(x)(u(x))^2$ où $u : x \longmapsto x^2+3$

On en déduit que les primitives de le fonction h sont les fonctions H_k définies sur $\mathbb{R}$ par $H_k : x \longmapsto \frac{(x^2+3)^3}{3}$