CALCUL DE DÉRIVÉES : COMPLÉMENTS

1) DÉRIVÉE DE $x \longmapsto [u(x)]^n$ (où n est un entier relatif non nul)

Propriété :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et n un entier naturel non nul.
La fonction $f : x \longmapsto [u(x)]^n$ est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$, on a $f'(x) = n\,u'(x)[u(x)]^{n-1}$

Remarque :

Si pour tout $x \in I$, $u(x) \neq 0$, cette formule est encore vraie pour un entier négatif non nul.

Exemple : Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x^2+1)^5$

$u : x \longmapsto 3x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$, on a : $u'(x) = 6x$

On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 5\,u'(x)\,(u(x))^4 = 5 \times 6x\,(3x^2+1)^4 = 30x\,(3x^2+1)^4$

2) CAS GÉNÉRAL

Propriété :

Soit g une fonction dérivable sur un intervalle J et u est une fonction dérivable sur un intervalle I, telle que pour tout x de I, $u(x)$ appartient à J.
Alors la fonction f définie par $f(x) = g(u(x))$ est dérivable sur I et pour tout x de I, on a :

$$f'(x) = u'(x) \times g'(u(x))$$

Exemple : Déterminer sur $]0\,;+\infty[$ la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2x^3}$

Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on pose : $f(x) = g(u(x))$ où $g : x \longmapsto \sqrt{x}$ et $u : x \longmapsto 2x^3$
La fonction g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on a : $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$u : x \longmapsto 2x^3$ est strictement positive et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour $x \in \mathbb{R}$, on a : $u'(x) = 6x^2$
On en déduit que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x > 0$, on a : $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{6x^2}{2\sqrt{2x^3}} = \dfrac{3x^2}{\sqrt{2x^3}}$

Exemple : Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose : $f(x) = g(u(x))$ où $g : x \longmapsto \sin x$ et $u : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $g'(x) = \cos x$
La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
(Pour tout $x \neq 0$, on a bien sûr $u(x) \in \mathbb{R}$ ... Dans la pratique, quand la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, cette vérification n'est pas nécessaire)

On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \neq 0$, on a : $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$