PRIMITIVES

1) DÉFINITION

Exemple : Soit les fonction $f : x \longmapsto 2x^2+3x+5$ et $F : x \longmapsto \frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+5x+3$ définies sur $\mathbb{R}$. Quel lien existe-il entre F et f ?

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .
Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I , telle que pour tout x dans I , $F'(x)=f(x)$.

Une fonction est souvent notée par une lettre minuscule et l'usage est de noter une primitive (si elle existe) par la majuscule associée.

Théorème :

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle, alors f admet des primitives sur cet intervalle.

2) LIEN ENTRE DEUX PRIMITIVES

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si F est une primitive de f sur I , alors f admet une infinité de primitives.
Toute autre primitive de f sur I est définie par $G(x)=F(x)+k$ où $k \in \mathbb{R}$

On dit que deux primitives d'une fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Exemple : Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f.

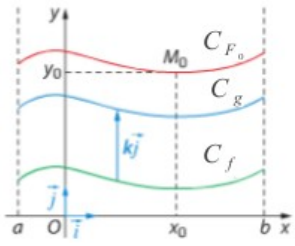
Propriété :

Soit f une fonction admettant des primitives sur I.
Pour tout couple de réels $(x_0 ; y_0)$ où x_0 est un réel donné dans I et y_0 est un réel quelconque, il existe une primitive et une seule F_0 de f sur I telle que $F_0(x_0)=y_0$

Exemple : Déterminer la primitive de la fonction f prenant la valeur $\frac{13}{6}$ en 1.

Remarque :

Les courbes représentatives des primitives d'une fonction f se déduisent donc l'une de l'autre par des translations de vecteurs $k\vec{j}$ $(k \in \mathbb{R})$.
Une seule d'entre elles passe par le point M_0 de coordonnées $(x_0 ; y_0)$



3) CALCULS DE PRIMITIVES

Les opérations sur les fonctions dérivables et la définition d'une primitive conduisent aux résultats suivants :

- si F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I , alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.
- si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et λ un réel, alors λF est une primitive de λf sur I.

De même, les résultats connus sur les dérivées des fonctions usuelles donnent par « lecture inverse » les primitives.

Exemple :

Déterminer les primitives de la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g : x \longmapsto \dfrac{6}{\sqrt{x}} + x^2$.

Propriété :

Soit une fonction u dérivable sur un intervalle I.

Les primitives sur I des fonctions de la forme $t \longmapsto u'(t) \times (u(t))^n$, où $n \in \mathbb{N}$ sont les fonctions $t \longmapsto \dfrac{(u(t))^{n+1}}{n+1} + k$, où $k \in \mathbb{R}$

Remarque :

Si pour tout $x \in I$, $u(x) \neq 0$, cette formule est encore vraie pour un entier négatif différent de -1.

Exemple :

Déterminer les primitives de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h : x \longmapsto 2x(x^2+3)^2$