ÉCRITURE EXPONENTIELLE D'UN NOMBRE COMPLEXE

1) NOTATION EXPONENTIELLE

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on convient de remplacer $\cos\theta + i\sin\theta$ par $e^{i\theta}$

Exemples :

- $2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$
- $3\left(\cos\left(\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right)=3\,e^{i\frac{2\pi}{7}}$
- $2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=$ … on ne peut pas remplacer .

  On a tout de même $2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)=2\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$
- $-5(\cos(0)+i\sin(0))=-5\,e^{i0}$

Notation :

On appelle écriture **exponentielle** d'un nombre complexe, l'écriture :

$$r\,e^{i\theta} \quad (\text{avec } r\geqslant 0)$$

Dans ce cas **le module** esr r et **l'argument** est θ à 2π près.

Remarque : Si $r=0$, le complexe est nul et il n'a pas d'argument.

Exemples :

- $2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$, $3\,e^{i\frac{2\pi}{7}}$ et $2\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$ sont des écritures exponentielles.
- $-5\,e^{i0}$ n'est pas une écriture exponentielle car -5 est négatif.

  Par contre, on a $-5\,e^{i0}=-5(\cos(0)+i\sin(0))=-5=5(-1+i\times 0)=5(\cos(\pi)+i\sin(\pi))=5\,e^{i\pi}$.
  Et $5\,e^{i\pi}$ est une écriture exponentielle.

2) PRODUIT, QUOTIENT ET CONJUGUÉ

Propriétés :

Pour tous réels θ et θ', on a :

- $e^{i\theta}\times e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$
- $\frac{1}{e^{i\theta}}=e^{i(-\theta)}=e^{-i\theta}$
- $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')}$
- $\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$

Preuve :

Soit deux réels θ et θ'.

En utilisant les formules de trigonométrie, on a :

$$e^{i\theta}\times e^{i\theta'}=(\cos(\theta)+i\sin(\theta))\times(\cos(\theta')+i\sin(\theta'))=\cos(\theta)\cos(\theta')-\sin(\theta)\sin(\theta')+i(\cos(\theta)\sin(\theta')+\sin(\theta)\cos(\theta'))=\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')$$

On en déduit que $e^{i\theta}\times e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$

On démontre de même les autres formules.