I - Vocabulaire

Définition

Une **équation** est une expression dans laquelle il y a toujours un signe égal et une ou plusieurs inconnues (désignées chacune par une lettre, en général).

Exemple 1 : $2x^2 - 5 = x + 10$ est une équation où l'inconnue est désignée par la lettre x. Cette équation a deux membres : $2x^2 - 5$ (membre de gauche) et $x + 10$ (membre de droite).

Définitions

Résoudre une équation d'inconnue x, c'est déterminer toutes les valeurs de x (si elles existent) pour que l'égalité soit vraie. Chacune de ces valeurs est appelée **solution de l'équation**.

Exemple 2 : Les solutions de l'équation $2x^2 - 5 = x + 10$ sont les valeurs du nombre x pour lesquelles l'égalité $2x^2 - 5 = x + 10$ est vérifiée.

Exemple 3 : 3 est-il une solution de l'équation $2x^2 - 5 = x + 10$?

Pour $x = 3$, on calcule séparément $\mathbf{2x^2 - 5}$ et $\mathbf{x + 10}$:

$\mathbf{2x^2 - 5} = 2 \times 3^2 - 5 = 2 \times 9 - 5 = \mathbf{13}$

$\mathbf{x + 10} = 3 + 10 = \mathbf{13}$

On constate qu'il y a égalité donc 3 est une solution de l'équation $2x^2 - 5 = x + 10$.

II - Résolution d'une équation du premier degré

Propriétés

Pour tous nombres a, b et c :

• Une égalité reste vraie **si on ajoute ou si on soustrait un même nombre** à ses deux membres.	• si $a = b$ alors $a + c = b + c$ • si $a = b$ alors $a - c = b - c$
• Une égalité reste vraie **si on multiplie ou si on divise** ses deux membres **par un même nombre non nul**.	• si $a = b$ alors $a \times c = b \times c$ • si $a = b$ alors $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ (où $c \neq 0$)

Exemple : Résous l'équation $7x + 2 = 4x + 9$.

$7x + 2 = \mathbf{4x} + 9$

càd $7x + 2 \mathbf{- 4x} = \mathbf{4x} + 9 \mathbf{- 4x}$ → **On élimine les termes en x dans le membre de droite** en retranchant $\mathbf{4x}$ aux deux membres. càd

càd $3x \mathbf{+ 2} = 9$

càd $3x \mathbf{+ 2 - 2} = 9 \mathbf{- 2}$ → **On isole le terme en x dans le membre de gauche** en retranchant $\mathbf{2}$ aux deux membres.

càd $\mathbf{3}x = 7$

càd $\frac{3x}{\mathbf{3}} = \frac{7}{\mathbf{3}}$ → **On cherche la valeur de l'inconnue x** en divisant les deux membres par $\mathbf{3}$.

càd $x = \frac{7}{3}$

Puis, on vérifie que $\frac{7}{3}$ est une solution de l'équation $7x + 2 = 4x + 9$ en appliquant la **partie I**.

Ainsi $7x + 2 = 4x + 9$ a pour unique solution $x = \frac{7}{3}$.

III - Résolution de problème

Définition

Mettre en équation un problème, c'est traduire son énoncé par une égalité mathématique.

Exemple : Trouve le nombre tel que son quintuple augmenté de 7 soit égal à 3.

Étape n°1 : Choix de l'inconnue	Soit x le nombre cherché.	→ **On note** généralement l'inconnue x.
Étape n°2 : Mise en équation	Le quintuple du nombre augmenté de 7 est $5x + 7$. $5x + 7 = 3$	→ **On exprime les informations données** dans l'énoncé en fonction de x. → La phrase de l'énoncé se traduit ainsi.
Étape n°3 : Résolution de l'équation	$5x + 7 = 3$ càd $5x + 7 \textbf{ - 7} = 3 \textbf{ - 7}$ càd $5x = -4$ càd $x = \frac{-4}{\textbf{5}}$	→ **On résout l'équation** à l'aide des propriétés de la **partie II**.
Étape n°4 : Vérification que la valeur trouvée est solution du problème	$5 \times \left(-\frac{4}{5}\right) + 7 = -4 + 7 = 3$	→ **On calcule**. Le quintuple de $-\frac{4}{5}$ augmenté de 7 est égal à 3.
Étape n°5 : Conclusion	Le nombre cherché est donc $-\frac{4}{5}$.	

IV - Comparaison de nombres

Propriétés

Pour tous nombres a, b et c :

• On ne change pas le sens d'une inégalité si on ajoute ou si on soustrait un même nombre à ses deux membres.	• si $a \leqslant b$ alors $a + c \leqslant b + c$ • si $a \leqslant b$ alors $a - c \leqslant b - c$
• On ne change pas le sens d'une inégalité si on multiplie ou si on divise ses deux membres par un même nombre positif non nul.	• si $a \leqslant b$ et $c > 0$ alors $a \times c \leqslant b \times c$ • si $a \leqslant b$ et $c > 0$ alors $\frac{a}{c} \leqslant \frac{b}{c}$
• On change le sens d'une inégalité si on multiplie ou si on divise ses deux membres par un même nombre négatif non nul.	• si $a \leqslant b$ et $c < 0$ alors $a \times c \geqslant b \times c$ • si $a \leqslant b$ et $c < 0$ alors $\frac{a}{c} \geqslant \frac{b}{c}$

Exemple : Sachant que $a < -2{,}5$ déduis-en une inégalité pour $a + 7$ et $-2a$.

$a < -2{,}5$

càd $a + 7 < -2{,}5 + 7$ → On ajoute **+ 7** donc **le sens de l'inégalité ne change pas**.

càd $a + 7 < 4{,}5$

$a < -2{,}5$

càd $-2a > -2 \times (-2{,}5)$ → On multiplie par **- 2** qui est **un nombre négatif** donc **le sens de l'inégalité change**.

càd $-2a > 5$