I - Puissances entières d'un nombre relatif

A - Notations a^n et a^{-n}

Définitions

Pour tout nombre entier n positif non nul, pour tout nombre relatif a :

$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$ et, si a est non nul : $a^{-n} = \dfrac{1}{\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}} = \dfrac{1}{a^n}$ et par convention : $a^0 = 1$.

a^n (lu « a **puissance** n ») est appelé **puissance** n-ième de a et n est appelé l'**exposant**.

Remarque : En particulier : $a^1 = a$ et $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$.

Exemple 1 : Donne l'écriture décimale des nombres : 2^4 et 10^{-3}.

$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

$10^{-3} = \dfrac{1}{10^3} = \dfrac{1}{1\,000} = 0{,}001$

Exemple 2 : Écris sous la forme d'une puissance les expressions : $3^2 \times 3^3$ et $\dfrac{2^3}{2^5}$.

$3^2 \times 3^3 = (3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3) = 3^5$

$\dfrac{2^3}{2^5} = \dfrac{2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \dfrac{1}{2^2} = 2^{-2}$

B - Signe d'une puissance

Propriété

Pour tout nombre entier relatif n,

- Si a est **positif** alors a^n est **positif**.
- Si a est **négatif** alors a^n est **positif** lorsque l'exposant n est pair, et **négatif** lorsque l'exposant n est impair.

Exemple : Quel est le signe de A = $(-3)^4$ et de B = $(-2)^{-5}$?

- Comme **– 3 est négatif** et l'exposant **4 est pair**, **A est un nombre positif**.
- Comme **– 2 est négatif** et l'exposant **– 5 est impair**, **B est un nombre négatif**.

II - Puissances de 10

A - Notations 10^n et 10^{-n}

Définitions

Pour tout nombre entier $n > 0$: $10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \ldots}_{n \text{ facteurs}} \times 10 = 1\underbrace{0\ldots0}_{n \text{ zéros}}$; $10^{-n} = \underbrace{0{,}0\ldots0}_{n \text{ zéros}}1 = \dfrac{1}{10^n}$ et $10^0 = 1$.

Remarque : Autrement dit, 10^{-n} est l'inverse de 10^n.

Exemple : Écris les nombres 100 000 ; 0,01 ; 100 et 0,000 001 sous la forme d'une puissance de 10.

100 000 = 10^5	0,01 = 10^{-2}	100 = 10^2	0,000 001 = 10^{-6}

B - Multiplication par une puissance de 10

Règle Soit n un nombre entier positif non nul

Multiplier un nombre par 10^n revient à décaler la virgule de ***n* rangs vers la droite.**
(on complète par des zéros si nécessaire).

Multiplier un nombre par 10^{-n} revient à décaler la virgule de ***n* rangs vers la gauche.**
(on complète par des zéros si nécessaire).

Remarque : **Multiplier** par 10^{-n} revient à **diviser** par 10^n.

Exemple 1 : Donne l'écriture décimale des nombres $208{,}641 \times 10^2$ et $37{,}1 \times 10^{-3}$.

$208{,}641 \times \mathbf{10^2} = 20\,864{,}1$	$37{,}1 \times \mathbf{10^{-3}} = 0{,}037\,1$

Exemple 2 : Par combien faut-il multiplier 7,532 pour obtenir 75 320 ?
Par combien faut-il multiplier 7 pour obtenir 0,007 ?

- Pour passer de 7,532 à 75 320, on décale la virgule de **4 rangs vers la droite** donc il faut multiplier 7,532 par 10^4 pour obtenir 75 320.
- Pour passer de 7 à 0,007, on décale la virgule de **3 rangs vers la gauche** donc il faut multiplier 7 par 10^{-3} pour obtenir 0,007.

C - Calculs avec des puissances de 10

Dans tout ce paragraphe, on considère deux nombres entiers relatifs m et p.

Règle du produit de deux puissances de 10

$$10^m \times 10^p = 10^{m+p}$$

Exemple : Donne l'écriture décimale des nombres $A = 10^4 \times 10^3$ et $B = 10^{-3} \times 10^{-7}$.

$A = 10^4 \times 10^3 = 10^{4+3} = 10^7 = 10\,000\,000$

$B = 10^{-3} \times 10^{-7} = 10^{-3+(-7)} = 10^{-10} = 0{,}000\,000\,000\,1$

Règle du quotient de deux puissances de 10

$$\frac{10^m}{10^p} = 10^{m-p}$$

Exemple : Écris les nombres $C = \dfrac{10}{10^{-3}}$ et $D = \dfrac{10^{-7}}{10^3}$ sous la forme d'une seule puissance de 10.

$C = \frac{10^1}{10^{-3}}$	⟶	On remarque que $10 = 10^1$.
$C = 10^{1-(-3)}$ $C = 10^{1+3}$	⟶	On applique la règle du quotient de deux puissances de 10. (Attention aux signes moins !)
$C = 10^4$	⟶	On donne l'écriture demandée par l'énoncé.

$D = \frac{10^{-7}}{10^3}$		
$D = 10^{-7-3}$	⟶	On applique la règle du quotient de deux puissances de 10. (Attention aux signes moins !).
$D = 10^{-10}$	⟶	On donne l'écriture demandée par l'énoncé.

Règle des puissances de puissance de 10

$$\left(10^m\right)^p = 10^{m \times p}$$

Exemple 1 : Écris le nombre $E = \left(10^{-3}\right)^{-7} \times \left(10^2\right)^{-3}$ sous la forme d'une seule puissance de 10.

$E = 10^{-3 \times (-7)} \times 10^{2 \times (-3)}$	⟶	On applique la règle des puissances de puissance de 10.
$E = 10^{21} \times 10^{-6}$	⟶	On effectue les multiplications sur les exposants.
$E = 10^{21+(-6)}$	⟶	On applique la règle du produit de deux puissances de 10.
$E = 10^{15}$	⟶	On donne l'écriture demandée par l'énoncé.

Attention : Il n'y a pas de règle avec l'addition ou la soustraction !

Exemple 2 : Donne l'écriture décimale des nombres $F = 10^3 + 10^2$ et $G = 10^{-2} - 10^{-3}$.

$F = 10^3 + 10^2 = 1\,000 + 100 = 1\,100$	$G = 10^{-2} - 10^{-3} = 0{,}01 - 0{,}001 = 0{,}009$

III - Écriture scientifique

A - Une nouvelle écriture des nombres

Définitions

Tout nombre décimal non nul peut être écrit en **notation scientifique**,
c'est-à-dire sous la forme $a \times 10^n$, où a est un nombre décimal **ayant un seul chiffre non nul avant la virgule** et où n est un nombre **entier relatif**.
a est appelé **mantisse** du nombre.

Exemple : Écris le nombre A = 6 430 en notation scientifique.

A = **6 430**

A = $6{,}43 \times 10^{3}$ ⟶ On déplace la virgule de manière à obtenir un nombre ayant un seul chiffre non nul avant la virgule puis on multiplie par la puissance de 10 de manière à avoir égalité.

L'écriture scientifique de A est donc **$6{,}43 \times 10^{3}$**.

Exemple : Écris le nombre B = 0,0325 en notation scientifique.

B = **0,0325**

B = $3{,}25 \times 10^{-2}$ ⟶ On déplace la virgule de manière à obtenir un nombre ayant un seul chiffre non nul avant la virgule puis on multiplie par la puissance de 10 de manière à avoir égalité.

L'écriture scientifique de B est donc **$3{,}25 \times 10^{-2}$**.

B - Comparaison de nombres

Règle

Pour **comparer** deux nombres, on peut comparer leurs **ordres de grandeur** à l'aide de leurs **écritures scientifiques**.

En cas d'égalité des exposants, on compare alors les mantisses.

Exemple : Compare A = $1{,}7 \times 10^{3}$ et B = $2{,}5 \times 10^{-2}$ puis compare C = $12{,}4 \times 10^{3}$ et D = $3{,}1 \times 10^{4}$.

- L'ordre de grandeur de A est **10^{3}** alors que B est de l'ordre de **10^{-2}**. Donc **A > B**.
- On écrit C en notation scientifique : C = $1{,}24 \times 10 \times 10^{3} = 1{,}24 \times 10^{4}$.

  L'ordre de grandeur de C est donc **10^{4}** tout comme l'ordre de grandeur de D.

  Mais comme $1{,}24 < 3{,}1$, alors $1{,}24 \times 10^{4} < 3{,}1 \times 10^{4}$ et donc **C < D**.