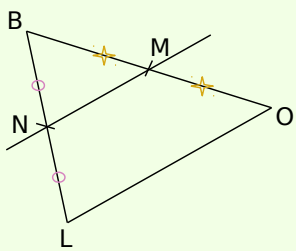
I - Les différentes formes du théorème des milieux

A - Montrer que des droites sont parallèles

Théorème

Si, dans un **triangle**, une droite passe par les **milieux** de deux côtés du triangle alors elle est **parallèle** au troisième côté.

Exemple : Soit la figure codée ci-dessous. Démontre que la droite (MN) est parallèle à la droite (OL).



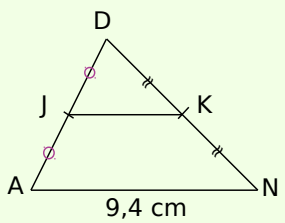
Données	Propriété	Conclusion
Par hypothèse, dans le triangle BOL, M est le milieu de [BO] et N est le milieu de [BL].	Or, si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés alors elle est parallèle au troisième côté.	Donc (MN)//(OL)

B - Calculer une longueur connaissant des milieux

Théorème

Si, dans un **triangle**, un segment joint les **milieux** de deux côtés alors sa longueur est **égale à la moitié** de celle du troisième côté.

Exemple : On donne la figure codée ci-dessous. Calcule la longueur JK.

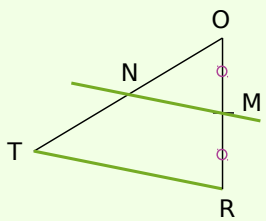


Données	Propriété	Conclusion
Par hypothèse, dans le triangle DAN, J et K sont les milieux respectifs des côtés [DA] et [DN] .	Or, si, dans un triangle, un segment joint les milieux de deux côtés alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté.	Donc, $JK = \frac{AN}{2} = \frac{9,4}{2} = 4,7$. Ainsi JK = 4,7 cm.

C - Montrer qu'un point est le milieu d'un segment

Si, dans un **triangle**, une droite passe par le **milieu** d'un côté et est **parallèle** à un deuxième côté alors elle passe par le **milieu** du troisième côté.

Exemple : Soit TOR un triangle tel que M soit le milieu du côté [RO]. La parallèle à (TR) passant par M coupe le côté [OT] en N. Démontre que N est le milieu du côté [OT].



les droites en vert sont parallèles entre elles

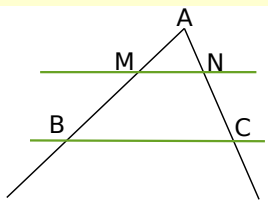
Données	Propriété	Conclusion
Par hypothèse, dans le triangle TOR, M est le milieu du côté [RO] et (MN)//(TR).	Or, si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté alors elle passe par le milieu du troisième côté.	Donc, (MN) coupe le troisième côté [OT] du triangle en son milieu, et N est le milieu de [OT].

II - Proportionnalité des longueurs dans le triangle

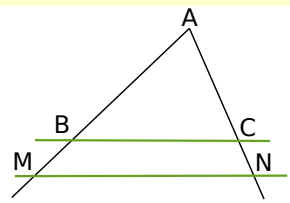
A - Énoncé

Théorème

Si, dans un triangle ABC, M est un point de la demi-droite [AB], N un point de la demi-droite [AC] et les droites **(MN) et (BC) sont parallèles alors** $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.



ou



Remarques :

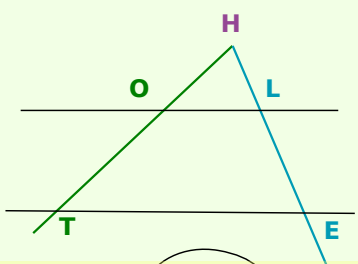
- On appelle parfois cette propriété la (petite) propriété de Thalès.
- Lorsque ce théorème s'applique, le tableau suivant est un tableau de proportionnalité.

Longueurs des côtés du triangle ABC	AB	AC	BC
Longueurs des côtés du triangle AMN	AM	AN	MN

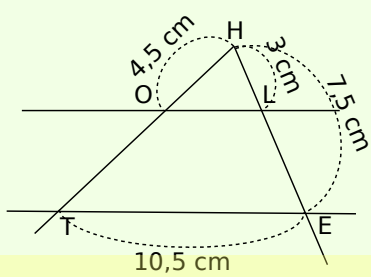
B - Calcul d'une longueur avec des rapports égaux

Exemple 1 : Sur la figure suivante, les droites (OL) et (TE) sont parallèles. O et L appartiennent respectivement aux demi-droites [HT] et [HE]. On donne HE = 7,5 cm, HL = 3 cm, TE = 10,5 cm et HO = 4,5 cm. Calcule les longueurs HT et OL.

Dans le triangle HTE : **O** ∈ [HT], **L** ∈ [HE] et (OL) // (TE).
D'après la (petite) propriété de Thalès :



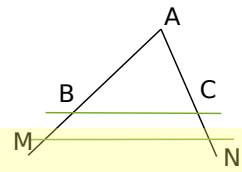
$\frac{HO}{HT} = \frac{HL}{HE} = \frac{OL}{TE}$



soit $\frac{4,5}{HT} = \frac{3}{7,5} = \frac{OL}{10,5}$

- D'une part, 3 × **HT** = 4,5 × 7,5 soit **HT** = $4,5 \times \frac{7,5}{3}$ = 11,25 donc **HT** = 11,25 cm.
- D'autre part, 7,5 × **OL** = 3 × 10,5 soit **OL** = $3 \times \frac{10,5}{7,5}$ = 4,2 donc **OL** = 4,2 cm.

Exemple 2 : Sur la figure suivante, les droites (BC) et (MN) sont parallèles. M et N appartiennent respectivement aux demi-droites [AB) et [AC). On donne AB = 4 cm, AC = 3 cm, BC = 4,5 cm et AM = 6 cm.
Calcule les longueurs AN et MN.



Par hypothèse, dans le triangle AMN , B ∈ [AM], C ∈ [AN] et (BC) // (MN).
D'après la (petite) propriété de Thalès, le tableau suivant est un tableau de proportionnalité.

Donc on passe des longueurs des côtés du triangle ABC aux longueurs des côtés du triangle AMN en multipliant par 1,5.

Longueurs des côtés du triangle ABC	AC = 3 cm	AB = 4 cm	BC = 4,5 cm
Longueurs des côtés du triangle AMN	**AN = 4,5 cm**	AM = 6 cm	**MN = 6,75 cm**

× 1,5

III - Agrandissement, réduction dans le plan

A - Définitions

Définitions

Quand deux figures F et F' ont la **même forme** et que les **longueurs des côtés de F' sont proportionnelles aux longueurs des côtés de F**, on dit que :

- F' est un agrandissement de F si le coefficient de proportionnalité est supérieur à 1 ;
- F' est une réduction de F si le coefficient de proportionnalité est inférieur à 1.

Ce coefficient est appelé **rapport d'agrandissement ou de réduction**.

Remarque : Si F est un agrandissement de F' de rapport k (non nul) alors F' est une réduction de F de rapport $\frac{1}{k}$.

Exemple : Ce casse-tête est un cube constitué de plusieurs petits cubes de différentes couleurs.
Chaque petit cube est-il une réduction du casse-tête ?
Si oui, précise le rapport de cette réduction.



Chaque petit cube et le casse-tête ont la même forme : un cube. Comme chaque petit cube est plus petit que le casse-tête, alors chaque petit cube est bien une réduction du casse-tête.
Le côté du casse-tête contient trois petits cubes donc le rapport de réduction est $\frac{1}{3}$.

Remarque : Le casse-tête est un agrandissement de chaque petit cube de rapport 3.

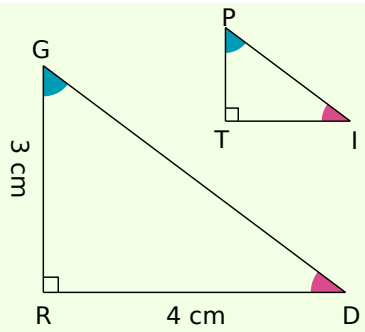
B - Propriété

Propriété

Dans un agrandissement ou une réduction les **mesures des angles**, la **perpendicularité** et le **parallélisme** sont conservés.

Exemple 1 : Calcul des longueurs dans une réduction

Le triangle GRD est rectangle en R tel que GR = 3 cm et RD = 4 cm. Le triangle PTI est une réduction de rapport 0,4 du triangle GRD, tel que l'angle $\widehat{PTI}$ soit la réduction de l'angle $\widehat{GRD}$.
Quelle est la nature du triangle PTI ? Calcule TP et TI.

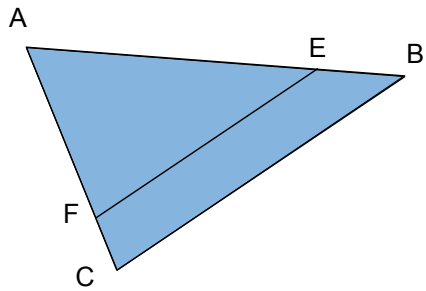


Comme PTI est une réduction de GRD de rapport 0,4 alors les mesures des angles sont conservées donc $\widehat{PTI} = \widehat{GRD} = 90°$.
Le triangle PTI est donc rectangle en T.

De plus, ses dimensions sont 0,4 fois celles du triangle GRD.
On en déduit alors que :
TP = 0,4 × RG = 0,4 × 3 = 1,2 soit TP = 1,2 cm et
TI = 0,4 × RD = 0,4 × 4 = 1,6 soit TI = 1,6 cm.

Exemple 2 : Déterminer si une figure est un agrandissement ou une réduction

Dans la figure ci-dessous, on donne les mesures suivantes :
AB = 9 cm, AC = 6 cm, BC = 7,5 cm, AF = 4,2 cm, AE = 6,3 cm et EF = 5,25 cm.
Le triangle AEF est-il une réduction du triangle ABC ?



Les figures AEF et ABC ont la même forme, on calcule donc les rapports :

$\frac{AE}{AB} = \frac{6,3}{9} = 0,7$

$\frac{AF}{AC} = \frac{4,2}{6} = 0,7$

$\frac{EF}{BC} = \frac{5,25}{7,5} = 0,7$

Les trois rapports sont égaux donc le triangle AEF est une réduction du triangle ABC.

Remarque : Les côtés du triangle AEF étant proportionnels aux côtés du triangle ABC, on peut les mettre dans un tableau de proportionnalité. On retrouve ainsi la proportionnalité des longueurs dans le triangle de la **partie II**.