I - Puissances entières d'un nombre relatif

A - Notations a^n et a^{-n}

Définitions

Pour tout nombre entier n positif non nul, pour tout nombre relatif a :

$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$ et, si a est non nul : $a^{-n} = \dfrac{1}{\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}} = \dfrac{1}{a^n}$ et par convention : $a^0 = 1$.

a^n (lu « a **puissance** n ») est appelé **puissance** n-ième de a et n est appelé l'**exposant**.

Remarque : En particulier : $a^1 = a$ et $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$.

Exemple 1 : Donne l'écriture décimale des nombres : 3^4 et 10^{-4}.

$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

$10^{-4} = \dfrac{1}{10^4} = \dfrac{1}{10\,000} = 0{,}0001$

Exemple 2 : Écris sous la forme d'une puissance les expressions : $2^2 \times 2^3$ et $\dfrac{5^3}{5^5}$.

$2^2 \times 2^3 = (2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) = 2^5$

$\dfrac{5^3}{5^5} = \dfrac{5 \times 5 \times 5}{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5} = \dfrac{1}{5^2} = 5^{-2}$

B - Utiliser les formules sur les puissances

Règles

Pour tout nombre relatif a non nul et pour tous nombres entiers relatifs m et p :

$a^m \times a^p = a^{m+p}$; $\dfrac{a^m}{a^p} = a^{m-p}$ et $(a^m)^p = a^{m \times p}$.

Exemple 1 : Écris les expressions suivantes sous la forme a^n, où a est un nombre relatif non nul et n un entier relatif.

$A = 5^2 \times 5^4$; $B = \dfrac{(-7)^{-5}}{(-7)^{-6}}$; $C = (0{,}2^{-3})^5$; $D = \pi^4 \times \pi^{-5} \times \pi$.

$A = 5^2 \times 5^4 = 5^{2+4} = 5^6$

$B = \dfrac{(-7)^{-5}}{(-7)^{-6}} = (-7)^{-5-(-6)} = (-7)^{-5+6} = (-7)^1 \ (= -7)$

$C = (0{,}2^{-3})^5 = 0{,}2^{-3 \times 5} = 0{,}2^{-15}$

$D = \pi^4 \times \pi^{-5} \times \pi = \pi^{4+(-5)+1} = \pi^0 \ (= 1)$

Exemple 2 : Écris le nombre $E = \dfrac{(-2)^4 \times 4^{-5}}{16^{-3}}$ sous la forme d'une puissance de 2.

$E = \dfrac{(-2)^4 \times (2^2)^{-5}}{(2^4)^{-3}}$ → On remplace 4 par 2^2 et 16 par 2^4.

$E = \dfrac{2^4 \times 2^{-10}}{2^{-12}}$ → On remarque que $(-2)^4 = 2^4$.

$E = 2^{4+(-10)-(-12)}$

$E = 2^{4-10+12}$ → On applique les règles sur les puissances.

$E = 2^6$ → On donne l'écriture demandée par l'énoncé.

Règles

Pour tous nombres relatifs a et b non nuls et pour tout nombre entier relatif n :

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Exemple 3 : Écris les expressions suivantes sous la forme a^n, où a est un nombre relatif non nul et n un entier relatif.

$F = 7^3 \times 5^3$; $G = \dfrac{3{,}5^{-5}}{0{,}5^{-5}}$; $H = (-12)^{-5} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-5}$; $I = \dfrac{\pi^4}{7^4}$.

$F = 7^3 \times 5^3 = (7 \times 5)^3 = 35^3$

$G = \dfrac{3{,}5^{-5}}{0{,}5^{-5}} = \left(\dfrac{3{,}5}{0{,}5}\right)^{-5} = 7^{-5}$

$H = (-12)^{-5} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-5} = \left(-12 \times \dfrac{1}{3}\right)^{-5} = (-4)^{-5}$

$I = \dfrac{\pi^4}{7^4} = \left(\dfrac{\pi}{7}\right)^4$

II - Cas particuliers des puissances de 10

Règles

Pour tous nombres entiers relatifs m et p :

- règle du **produit** de deux puissances de 10 : $10^m \times 10^p = 10^{m+p}$
- règle du **quotient** de deux puissances de 10 : $\dfrac{10^m}{10^p} = 10^{m-p}$
- règle des **puissances** de puissance de 10 : $(10^m)^p = 10^{m \times p}$

Exemple 1 : Écris les nombres $C = \dfrac{10}{10^{-7}}$ et $D = \dfrac{10^{-5}}{10^3}$ sous la forme d'une seule puissance de 10.

$C = \dfrac{10^1}{10^{-7}}$ → On remarque que $10 = 10^1$.

$C = 10^{1-(-7)}$
$C = 10^{1+7}$ → On applique la règle du quotient de deux puissances de 10. (Attention aux signes moins !)

$C = 10^8$ → On donne l'écriture demandée par l'énoncé.

$D = \dfrac{10^{-5}}{10^3}$

$D = 10^{-5-3}$ → On applique la règle du quotient de deux puissances de 10. (Attention aux signes moins !).

$D = 10^{-8}$ → On donne l'écriture demandée par l'énoncé.

Exemple 2 : Écris le nombre $E = \left(10^{-3}\right)^{-8} \times \left(10^2\right)^{-4}$ sous la forme d'une seule puissance de 10.

$E = 10^{-3 \times (-8)} \times 10^{2 \times (-4)}$ → On applique la règle des puissances de puissance de 10.

$E = 10^{24} \times 10^{-8}$ → On effectue les multiplications sur les exposants.

$E = 10^{24+(-8)}$ → On applique la règle du produit de deux puissances de 10.

$E = 10^{16}$ → On donne l'écriture demandée par l'énoncé.

III - Grandeurs et conversions

A - Grandeurs produit et quotient

Définitions

On appelle **grandeur quotient**, le quotient de deux grandeurs.
On appelle **grandeur produit**, le produit de deux grandeurs.

Exemples : L'aire d'un rectangle est une grandeur produit (c'est le produit de la longueur par la largeur) et la vitesse est une grandeur quotient (quotient de la distance par le temps).

B - Conversions

Règles

1 m = 10 dm

1 m² = 100 dm²

1 m³ = 1000 dm³ = 1000 L

1,5 h = 1,5 × 60 min = 90 min = 1 h 30 min

Exemple 1 : Exprime 1 h 15 min en heure décimale.

1 h 15 min = 75 min = $\frac{75}{60}$ h = 1,25 h

Exemple 2 : Le 3 avril 2007, la rame TGV d'essai n°4402 établissait un nouveau record de vitesse officiel de 574,8 km·h^{-1}. Convertis cette vitesse en m·s^{-1}.

574,8 km·h^{-1} signifie que l'on parcourt 574,8 km en 1 h.
Ainsi, 574,8 km·h^{-1} = $\frac{574{,}8 \text{ km}}{1 \text{ h}}$.
574,8 km = 574 800 m et 1 h = 3 600 s.
Donc 574,8 km·h^{-1} = $\frac{574\,800 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} = \frac{574\,800}{3\,600}$ m·s^{-1} = $\frac{479}{3}$ m·s^{-1} ≈ 159,7 m·s^{-1}.
La vitesse de cette rame de TGV était alors d'environ 159,7 m·s^{-1}.

Exemple 3 : La vitesse de rotation du disque dur d'un ordinateur est de 4 800 tours/min.
Convertis cette vitesse de rotation en tours par seconde.

4 800 tours/min signifie qu'en une minute, la partie rotative du disque dur effectue 4 800 tours autour de son axe.
1 min = 60 s.
Donc 4 800 tours/min = $\frac{4\,800 \text{ tours}}{1 \text{ min}} = \frac{4\,800 \text{ tours}}{60 \text{ s}} = \frac{4\,800}{60}$ tours/s = 80 tours/s.
La vitesse de rotation du disque dur est de 80 tours/s.

Exemple 4 : La masse volumique du cuivre vaut 8,96 g·cm^{-3}. Convertis-la en kg·m^{-3}..

« La masse volumique du cuivre vaut 8,96 g·cm^{-3}. » signifie que 1 cm³ de cuivre a une masse de 8,96 g. Ainsi, 8,96 g·cm^{-3}. = $\frac{8{,}96 \text{ g}}{1 \text{ cm}^3}$.
8,96 g = 0,008 96 kg et 1 cm³ = 0,000 001 m³.
Donc 8,96 g·cm^{-3}. = $\frac{0{,}008\,96 \text{ kg}}{0{,}000\,001 \text{ m}^3} = \frac{0{,}008\,96}{0{,}000\,001}$ kg·m^{-3} = 8 960 kg·m^{-3}.
La masse volumique du cuivre vaut donc 8 960 kg·m $^{-3}$.