I - Inégalités et inéquations

A - Inégalités

Définitions

Une **inégalité** permet de comparer deux nombres.

- $\pi \leqslant 5$ signifie que $\pi - 5$ est **négatif ou nul** : $\pi - 5 \leqslant 0$
- $\pi \geqslant 2$ signifie que $\pi - 2$ est **positif ou nul** : $\pi - 2 \geqslant 0$
- $\pi < 5$ signifie que $\pi - 5 < 0$
- $\pi > 2$ signifie que $\pi - 2 > 0$

Règles

- On **ne change pas** le sens d'une inégalité **en additionnant ou en soustrayant** un même nombre à ses deux membres.
- On **ne change pas** le sens d'une inégalité **en multipliant ou en divisant** ses deux membres par un même nombre **strictement positif**.
- On **change** le sens d'une inégalité **en multipliant ou en divisant** ses deux membres par un même nombre **strictement négatif**.

Exemple : Sachant que $\sqrt{3}$ est un nombre compris entre 1,7 et 1,8, encadre $-3\sqrt{3} - 4$.

$1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$

$-3 \times 1{,}7 > -3\sqrt{3} > -3 \times 1{,}8$

$-5{,}1 > -3\sqrt{3} > -5{,}4$

→ On multiplie l'inégalité par -3 qui est négatif donc on change le sens de l'inégalité.

$-5{,}4 < -3\sqrt{3} < -5{,}1$

→ Par convention, on écrit plutôt les signes « < » : il suffit d'inverser les bornes de l'inégalité.

$-5{,}4 - 4 < -3\sqrt{3} - 4 < -5{,}1 - 4$

$-9{,}4 < -3\sqrt{3} - 4 < -9{,}1$

→ On ajoute -4 à l'inégalité ce qui ne change pas son sens.

$-3\sqrt{3} - 4$ est un nombre compris entre $-9{,}4$ et $-9{,}1$.

B - Inéquations

Définitions

Une **inéquation** est une inégalité comportant une ou des inconnues.
Une **solution d'une inéquation** est un nombre pour lequel l'inégalité est vraie.

Exemples : **a.** -2 est-il solution de $4x + 5 < -3x - 15$? **b.** $-2{,}6$ de $3x + 7 < -2x - 6$?

a. On calcule séparément chaque membre de l'inégalité en remplaçant x par -2.

$4 \times (-2) + 5 = -8 + 5 = -3$ → Le membre de gauche a pour valeur -3.

$-3 \times (-2) - 15 = 6 - 15 = -9$ → Le membre de droite a pour valeur -9.

$-3 > -9$ donc -2 n'est pas solution de l'inéquation $4x + 5 < -3x - 15$. → On conclut après avoir comparé les deux valeurs trouvées.

b. On calcule séparément chaque membre de l'inégalité en remplaçant x par $-2{,}6$.

$3 \times (-2{,}6) + 7 = -0{,}8$

$-2 \times (-2{,}6) - 6 = -0{,}8$

→ Les deux valeurs trouvées sont identiques mais l'inégalité est stricte.

$-2{,}6$ n'est pas solution de l'inéquation $3x + 7 < -2x - 6$

II - Résoudre une inéquation

A - Méthode de résolution

Définition

Résoudre une inéquation, c'est trouver tous les nombres qui vérifient l'inégalité.

Exemple 1 : Résous l'inéquation suivante d'inconnue x : $5x - 4 > 3x - 3$.

$5x - 4 - 3x > 3x - 3 - 3x$ → On **soustrait $3x$** à chaque membre et on réduit.

càd $2x - 4 > -3$

càd $2x - 4 + 4 > -3 + 4$ → On **ajoute 4** à chaque membre et on réduit.

càd $2x > 1$

càd $x > \frac{1}{2}$ → On **divise** chaque membre par **2** qui est strictement positif donc le sens de l'inégalité ne change pas.

Les solutions sont tous les nombres strictement supérieurs à $\frac{1}{2}$.

Exemple 2 : Résous l'inéquation suivante d'inconnue x : $-2x - 7 \leqslant x - 2$.

$-3x - 7 \leqslant -2$ → On **soustrait x** à chaque membre.

càd $-3x \leqslant 5$ → On **ajoute 7** à chaque membre.

càd $x \geqslant -\frac{5}{3}$ → On **divise** chaque membre par **-3** qui est strictement négatif donc on change le sens de l'inégalité.

Les solutions sont tous les nombres supérieurs ou égaux à $-\frac{5}{3}$.

B - Représenter les solutions sur une droite graduée

Définitions

Dans la représentation des solutions sur une droite graduée :

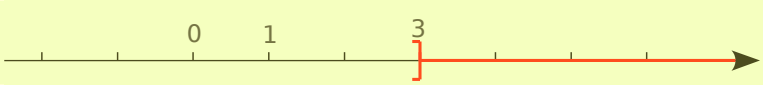
- si un crochet est **tourné vers les solutions** alors le nombre correspondant **fait partie des solutions** ;
- si le crochet est **tourné vers l'extérieur** alors le nombre correspondant **ne fait pas partie des solutions**.

Exemples :

a. Sur une droite graduée, représente en rouge les nombres solutions de l'inéquation $x > 3$.

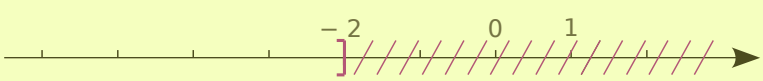
b. Sur une droite graduée, hachure les nombres qui ne sont pas solutions de l'inéquation $x \leqslant -2$.

a.



Le crochet n'est pas tourné vers les solutions car le nombre 3 n'est pas solution.

b.



Le crochet est tourné vers les solutions car le nombre -2 est une solution.