I - Système de deux équations

Définitions

$\begin{cases} 7x + 2y = 8 \\ -3x + y = -9 \end{cases}$ est un **système de deux équations** du premier degré à **deux inconnues** désignées par les lettres x et y.
Un couple de nombres $(x\ ;\ y)$ est **solution d'un système** s'il vérifie simultanément les deux égalités.

Exemple : Le couple $(2\ ;\ -3)$ est-il solution du système $\begin{cases} 7x + 2y = 8 \\ -3x + y = -9 \end{cases}$?

Pour $x = 2$ et $y = -3$:
$7x + 2y = 7 \times 2 + 2 \times (-3) = 14 - 6 = 8$ et $-3x + y = -3 \times 2 + (-3) = -9$.
Les deux égalités sont simultanément vérifiées pour $x = 2$ et $y = -3$ donc le couple $(2\ ;\ -3)$ est solution du système $\begin{cases} 7x + 2y = 8 \\ -3x + y = -9 \end{cases}$.

II - Résolution

Définition

Résoudre un système de deux équations à deux inconnues revient à déterminer **tous les couples de nombres $(x\ ;\ y)$** qui vérifient simultanément les deux équations.

A - Résolution par combinaisons

Exemple : Résous le système $\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 4x + 5y = 1 \end{cases}$ par combinaisons.

Détermination d'une des inconnues

On cherche à éliminer l'inconnue y pour se ramener à une équation du premier degré à une inconnue.

$\begin{cases} \mathbf{5} \times (3x - 4y) = \mathbf{5} \times 7 \\ \mathbf{4} \times (4x + 5y) = \mathbf{4} \times 1 \end{cases}$ → On multiplie les deux membres de la première équation par **5** et ceux de la seconde par **4**.

$\begin{cases} 15x - 20y = 35 \\ 16x + 20y = 4 \end{cases}$ → On obtient ainsi des coefficients opposés devant y dans les deux équations.

$15x + 16x = 35 + 4$ → On ajoute membre à membre les deux équations du système ainsi obtenu pour éliminer y.

càd $31x = 39$
càd $x = \frac{39}{31}$ → On résout cette équation à une inconnue pour trouver la valeur de x.

Détermination de l'autre inconnue

$4 \times \frac{\mathbf{39}}{\mathbf{31}} + 5y = 1$
càd $\frac{156}{31} + 5y = 1$
càd $5y = -\frac{125}{31}$
càd $y = -\frac{25}{31}$ → On remplace x par $\frac{\mathbf{39}}{\mathbf{31}}$ dans l'une des deux équations pour trouver y (ici la deuxième).

On trouve $y = -\frac{25}{31}$

Donc, si $\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 4x + 5y = 1 \end{cases}$ alors $\begin{cases} x = \frac{39}{31} \\ y = -\frac{25}{31} \end{cases}$

On vérifie ensuite que le couple $\left(\frac{39}{31} ; -\frac{25}{31}\right)$ est une solution effective de ce système.

$3x - 4y = 3 \times \frac{39}{31} - 4\times\left(-\frac{25}{31}\right) = \frac{117}{31} + \frac{100}{31} = \frac{217}{31} = 7$

$4x + 5y = 4 \times \frac{39}{31} + 5\times\left(-\frac{25}{31}\right) = \frac{156}{31} - \frac{125}{31} = \frac{31}{31} = 1$

On en déduit que le couple $\left(\frac{39}{31} ; -\frac{25}{31}\right)$ est la solution de ce système.

Remarque : Pour trouver la valeur de y, on pouvait aussi éliminer l'inconnue x.

B - Résolution par substitution

Exemple : Résous le système $\begin{cases} -4x + y = -7 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$ par substitution.

$y = -7 + 4x$ → On exprime y en fonction de x à l'aide de la première équation.

$4x - 3(-7 + 4x) = 5$ → On remplace (substitue) y par $-7 + 4x$ dans la deuxième équation.

$4x + 21 - 12x = 5$
càd $-8x = 16$
càd $x = 2$ → On résout l'équation à une inconnue ainsi obtenue pour trouver la valeur de x.

$y = -7 + 4 \times (2)$
$y = -7 + 8$
$y = 1$ → On remplace x par 2 dans l'équation trouvée à la première étape pour trouver la valeur de y.

Donc, si $\begin{cases} -4x + y = -7 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$ alors $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

On vérifie ensuite que le couple (2 ; 1) est une solution effective de ce système en appliquant ce qui a été vu **partie I**. On en déduit que (2 ; 1) est la solution de ce système.

III - Étapes pour résoudre un problème

Un musée propose un tarif pour les adultes à 8 € et un autre pour les enfants à 4,50 €. Lors d'une journée, ce musée a reçu la visite de 193 personnes et la recette totale a été de 1 414,50 €.
Retrouve le nombre d'adultes et le nombre d'enfants ayant visité le musée lors de cette journée.

Étape n°1 : Choisir les inconnues

Soit x le nombre d'adultes et y le nombre d'enfants. → **On repère les inconnues.** On les note généralement x et y.

Étape n°2 : Mettre le problème en équation

193 personnes ont visité le musée donc $x + y = 193$.
La recette totale a été de 1 414,50 € donc
$8x + 4{,}50y = 1\,414{,}50$. → **On exprime les informations données** dans l'énoncé en fonction de x et de y.

Ainsi $\begin{cases} x + y = 193 \\ 8x + 4{,}50y = 1\,414{,}50 \end{cases}$ → L'énoncé se traduit donc par le système ci-contre.

Étape n°3 : Résoudre le système. On trouve x =156 et y =37 (voir **partie II**).
Étape n°4 : Vérifier que le couple trouvé est solution du problème (voir **partie I**).
Étape n°5 : Conclure. 156 adultes et 37 enfants ont visité le musée lors de cette journée.