I - Développer avec des identités remarquables

Propriétés

Pour tous nombres réels a et b :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad ; \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad ; \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Exemple 1 : Développe et réduis l'expression $(x+7)^2$.

On utilise l'identité $(a+b)^2$ avec $a = x$ et $b = 7$.

$(x+7)^2 = x^2 + 2 \times x \times 7 + 7^2$ ⟶ On remplace a par x et b par 7 dans $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$(x+7)^2 = x^2 + 14x + 49$ ⟶ On réduit l'expression obtenue.

Exemple 2 : Développe et réduis l'expression $(2x-4)^2$.

On utilise l'identité $(a-b)^2$ avec $a = 2x$ et $b = 4$.

$(2x-4)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 4 + 4^2$ ⟶ On remplace a par $2x$ et b par 4 dans $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Attention, le double produit n'est pas précédé du même signe que les deux carrés !

Attention ! $a = 2x$ donc $a^2 = (2x)^2 = 2^2 \times x^2 = 4x^2$.

$(2x-4)^2 = 4x^2 - 16x + 16$ ⟶ On réduit l'expression obtenue.

Exemple 3 : Développe et réduis l'expression $(9x+2)(9x-2)$.

On utilise l'identité $(a+b)(a-b)$ avec $a = 9x$ et $b = 2$.

$(9x+2)(9x-2) = (9x)^2 - 2^2$ ⟶ On remplace a par $9x$ et b par 2 dans $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

$(9x+2)(9x-2) = 81x^2 - 4$ ⟶ On réduit l'expression obtenue.

II - Factoriser avec un facteur commun

Propriétés

Pour tous nombres réels a, b et k :

$$k \times a + k \times b = k \times (a+b) \quad \text{et} \quad k \times a - k \times b = k \times (a-b).$$

Exemple 1 : Fais apparaître un facteur commun dans l'expression $A = 3y + 39$ puis factorise.

$A = 3 \times y + 3 \times 13$ ⟶ On repère un facteur commun.

$A = 3(y + 13)$ ⟶ On factorise.

Exemple 2 : Factorise l'expression $D = (3x-4)(8x+6) - (3x-4)(4x+11)$.

$D = (3x-4)(8x+6) - (3x-4)(4x+11)$ ⟶ On repère un facteur commun.

$D = (3x-4)[(8x+6) - (4x+11)]$ ⟶ On factorise.

$D = (3x-4)[8x+6-4x-11]$ ⟶ On supprime les parenthèses à l'intérieur des crochets en faisant attention au signe « − ».

$D = (3x-4)(4x-5)$ ⟶ On réduit l'expression à l'intérieur des

crochets.

Exemple 3 : Factorise l'expression $E = (8x - 7)(9x - 3) - (8x - 7)^2$.

$E = \mathbf{(8x - 7)}(9x - 3) - \mathbf{(8x - 7)}(8x - 7)$	⟶	On repère un facteur commun.
$E = \mathbf{(8x - 7)}[(9x - 3) - (8x - 7)]$	⟶	On factorise.
$E = \mathbf{(8x - 7)}[9x - 3 - 8x + 7]$	⟶	On supprime les parenthèses à l'intérieur des crochets en faisant attention au signe « − ».
$E = \mathbf{(8x - 7)}(x + 4)$	⟶	On réduit l'expression à l'intérieur des crochets.

III - Factoriser avec des identités remarquables

Propriétés

Pour tous nombres réels a et b :

$$\mathbf{a^2 + 2ab + b^2} = (\mathbf{a + b})^2 \quad ; \quad \mathbf{a^2 - 2ab + b^2} = (\mathbf{a - b})^2 \quad ; \quad \mathbf{a^2 - b^2} = (\mathbf{a + b})(\mathbf{a - b}).$$

Exemple 1 : Factorise l'expression $A = x^2 + 10x + 25$.

$A = x^2 + 10x + 25$	⟶	On observe trois termes précédés du signe +.
$A = \mathbf{x}^2 + 2 \times \mathbf{x} \times \mathbf{5} + \mathbf{25}^2$	⟶	On met en évidence l'identité remarquable $\mathbf{a^2 + 2ab + b^2} = (\mathbf{a + b})^2$ avec $a = \mathbf{x}$ et $b = \mathbf{5}$.
$A = (\mathbf{x} + \mathbf{5})^2$	⟶	On remplace a par $\mathbf{x}$ et b par $\mathbf{5}$ dans $(\mathbf{a + b})^2$.

Exemple 2 : Factorise l'expression $B = 16x^2 - 24x + 9$.

$B = 16x^2 - 24x + 9$	⟶	On observe trois termes et des signes différents.
$B = (\mathbf{4x})^2 - 2 \times \mathbf{4x} \times \mathbf{3} + \mathbf{3}^2$	⟶	On met en évidence l'identité remarquable $\mathbf{a^2 - 2ab + b^2} = (\mathbf{a - b})^2$ avec $a = \mathbf{4x}$ et $b = \mathbf{3}$.
$B = (\mathbf{4x} - \mathbf{3})^2$	⟶	On remplace a par $\mathbf{4x}$ et b par $\mathbf{3}$ dans $(\mathbf{a - b})^2$.

Exemple 3 : Factorise l'expression $C = 121x^2 - 81$.

$C = 121x^2 - 81$	⟶	On observe la différence de deux carrés.
$C = (\mathbf{11x})^2 - \mathbf{9}^2$	⟶	On met en évidence l'identité remarquable $\mathbf{a^2 - b^2} = (\mathbf{a + b})(\mathbf{a - b})$ avec $a = \mathbf{11x}$ et $b = \mathbf{9}$.
$C = (\mathbf{11x} + \mathbf{9})(\mathbf{11x} - \mathbf{9})$	⟶	On remplace a par $\mathbf{11x}$ et b par $\mathbf{9}$ dans $(\mathbf{a + b})(\mathbf{a - b})$.

IV - Équation produit

Propriété

Si un produit est nul alors l'un au moins de ses facteurs est nul.

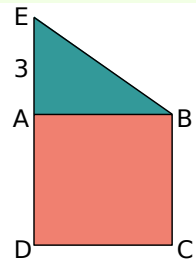
Exemple : Résous l'équation $(x + 7)(x - 3) = 0$.

Si un produit est nul alors l'un de ses facteurs au moins est nul.
On en déduit que : $x + 7 = 0$ ou $x - 3 = 0$
$x = -7$ ou $x = 3$
On teste les valeurs trouvées.
Pour $x = -7$: $(x + 7)(x - 3) = (-7 + 7)(-7 - 3) = 0 \times (-10) = 0$.

Pour $x = 3$: $(x + 7)(x - 3) = (3 + 7)(3 - 3) = 10 \times 0 = 0$.
Les solutions de l'équation produit $(x + 7)(x - 3) = 0$ sont -7 et 3.

V - Mettre en équation un problème

Exemple : Sur le schéma, ABCD est un carré et ABE est un triangle rectangle en A tel que AE = 3 cm. Tous les points sont distincts.
Quelle doit être la longueur du côté du carré ABCD pour que son aire soit égale à l'aire du triangle rectangle ABE ?



Étape n°1 : Choisir l'inconnue

Soit x la mesure en cm du côté du carré ABCD.
Comme les points sont distincts alors $x > 0$.
Donc AB = BC = CD = DA = x.

On repère la grandeur inconnue parmi celles exprimées dans l'énoncé. On la note x.

Étape n°2 : Mettre en équation

$\mathcal{A}_{ABCD} = AB \times AD$
$\mathcal{A}_{ABCD} = x \times x = x^2$

$\mathcal{A}_{ABE} = AB \times AE \div 2$
$\mathcal{A}_{ABE} = x \times 3 \div 2 = 1{,}5x$

On exprime les informations données dans l'énoncé en fonction de x.

On veut que :
Aire du carré ABCD = Aire du triangle rectangle ABE.
Le nombre x cherché vérifie donc l'équation :
$x^2 = 1{,}5x$.

La phrase de l'énoncé se traduit donc par l'égalité ci-contre.

Étape n°3 : Résoudre l'équation

Pour résoudre l'équation, on se ramène à une équation produit.

$x^2 - \mathbf{1{,}5x} = 1{,}5x - \mathbf{1{,}5x}$
càd $x^2 - 1{,}5x = 0$

On élimine les termes en x dans le membre de droite.

càd $\mathbf{x} \times x - 1{,}5 \times \mathbf{x} = 0$
$\mathbf{x}(x - 1{,}5) = 0$

On factorise pour se ramener à une équation produit.

Si un produit est nul alors l'un de ses facteurs au moins est nul.

$x = 0$ ou $x - 1{,}5 = 0$
càd $x = 0$ ou $x = 1{,}5$

On résout l'équation produit.

Étape n°4 : Vérifier que les valeurs trouvées sont solution du problème

On teste les valeurs trouvées.
Pour $x = 0$: $x^2 = 0$ et $1{,}5x = 0$.
Pour $x = 1{,}5$: $x^2 = 1{,}5^2 = 2{,}25$
et $1{,}5x = 1{,}5 \times 1{,}5 = 2{,}25$.
Comme x est un nombre strictement positif, la solution 0 ne convient pas à ce problème.

On vérifie que les valeurs trouvées répondent à la question.

Étape n°5 : Conclure

La solution du problème est donc 1,5 cm.

On conclut