DERIVATION

1) LIMITE FINIE D'UNE FONCTION EN ZERO

A) ETUDE D'UN EXEMPLE

Soit $f : x \longmapsto \dfrac{4 - 4 (1 - x)^2}{x}$, $Df = \mathbb{R}^*$

f (0) n'existe pas , mais f (x) est calculable pour toute les valeurs de x très voisines de 0.

« Que deviennent les nombres f (x) lorsque x prend des valeurs voisines de zéro ? » (par exemple celles de $] - 0,1 ; 0 [\cup] 0 ; 0,1 [$)

Répondre à cette question, c'est déterminer la limite de f en 0.

x	-0,9	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	0,001	0,01	0,1	0,5	0,9
f (x)	11.6	10	8,4	8.04	8,004	7,996	7,96	7,6	6	4,4

Le tableau de valeurs ci-dessus, nous permet de constater que les nombres f (x) s'accumulent autour de 8, lorsque x est voisin de 0 …

Le résultat n'est, en fait, pas surprenant ; en effet :
Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$f (x) = \frac{4 - 4 (1 - 2x + x^2)}{x} = 8 - 4 x$$

Ainsi, lorsque x prend des valeurs de plus en plus voisines de zéro, les nombres $f (x) = 8 - 4 x$ s'accumulent autour de 8 .
Plus précisément, ils finissent par se trouver dans tout intervalle $I =] 8 - \varepsilon ; 8 + \varepsilon [$, aussi petit que soit ε ($\varepsilon > 0$)

Par exemple, si on choisit $\varepsilon = 0,001$, tous les nombres $f (x) = 8 - 4x$ sont dans I , lorsque $- 0,00025 < x < 0,00025$

On dit alors que 8 est la limite de f en 0 et on note :

$$\lim_{x \to 0} f (x) = 8$$

B) CAS GENERAL

Soit f une fonction telle que zéro soit dans son ensemble de définition Df ou soit une borne de Df.
Intuitivement, dire que f a pour limite l en zéro, signifie que lorsque x prend des valeurs de plus en plus proche de zéro, les nombres f (x) correspondants viennent s'accumuler autour de l .
C'est à dire que pour tout ε ($\varepsilon > 0$) , aussi petit qu'il soit, les nombres f (x) finissent par se situer dans l'intervalle $] l - \varepsilon ; l + \varepsilon [$.
On note :

$$\lim_{x \to 0} f (x) = l$$

C) QUELQUES RESULTATS A CONNAITRE … (admis)

- $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

- Soit P une fonction polynôme et Q est une fonction rationnelle définie en 0 .
  $\lim\limits_{x \to 0} P (x) = P (0)$ et $\lim\limits_{x \to 0} Q (x) = Q (0)$
- Si P et Q sont définies et positives au voisinage de 0 , alors :
  $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{P (x)} = \sqrt{P (0)}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{Q (x)} = \sqrt{Q (0)}$

- Soit f et g deux fonctions telles que $\lim\limits_{x \to 0} f (x) = l$ et $\lim\limits_{x \to 0} g (x) = l'$, alors :
  $\lim\limits_{x \to 0} (f + g) (x) = l + l'$ et $\lim\limits_{x \to 0} (f \times g) (x) = l \times l'$

Ex :

$\lim\limits_{x \to 0} (- 3 x^2 + 2x - 8) = - 8$, $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{4 x + 2}{x^2 + 1} \right) = 2$, $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{\dfrac{4 x + 2}{x^2 + 1}} = \sqrt{2}$, $\lim\limits_{x \to 0} \left(- 3 x^2 + 2x - 8 + \sqrt{\dfrac{4 x + 2}{x^2 + 1}} \right) = - 8 + \sqrt{2}$

2) FONCTION DERIVABLE – NOMBRE DERIVE

Soit f une fonction définie sur un intervalle ou sur une réunion d'intervalles deux à deux disjoints et a ∈ D f .

Dire que la fonction f est **dérivable** en a et que **le nombre dérivé** de f en a est le réel L , revient à dire que **le taux de variation** de f en a , $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, admet pour limite finie L quand h tend vers 0 .

Le nombre dérivé est noté f '(a) , et on a : $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Ex : Soit la fonction f : x ⟼ x ² définie sur ℝ et a un réel quelconque.

Pour h ≠ 0, on a :

$t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = 2a + h$.

Or $\lim\limits_{h \to 0} (2a + h) = 2a$.

Ainsi f est dérivable en a et f '(a) = 2 a .

3) QUELQUES APPLICATIONS

A) TANGENTE EN UN POINT

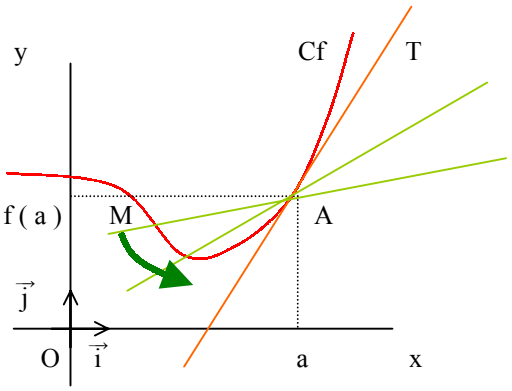
Un peu d'intuition …

Soit M le point de Cf d'abscisse a + h .

Le coefficient directeur de la droite (AM) est : $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Géométriquement, la tangente à Cf au point A se conçoit comme la droite « position limite » des sécantes (AM) lorsque M tend vers A en restant sur la courbe .

Si f est dérivable en a , la « position limite » de ces sécantes a pour coefficient directeur f '(a) , et passe par A



Si f est dérivable en a, la courbe Cf admet au point A (a ; f (a)) une **tangente** T de coefficient directeur f '(a) .

Une équation de la tangente en ce point est :

$y = f'(a)(x - a) + f(a)$

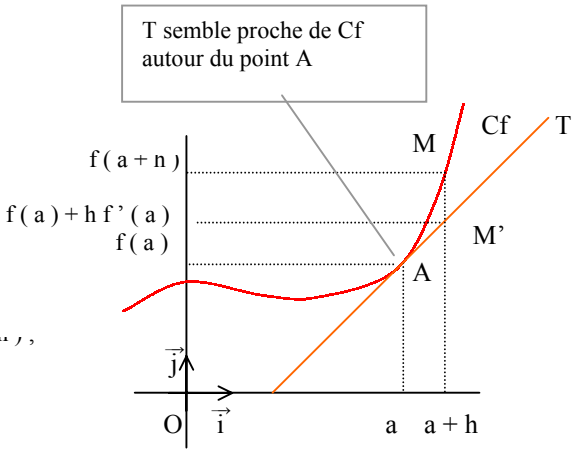
T admet une équation de la forme y = f '(a) x + p ;
de plus elle passe par A (a ; f (a)) …

Cas particulier important :

- Si f '(a) = 0 , Cf admet au point d'abscisse a une tangente parallèle à l'axe des abscisses (tangente horizontale) d'équation y = f (a) .

B) APPROXIMATION AFFINE LOCALE (admis)

On dit que f (a) + h f '(a) est **la meilleure approximation affine** f (a + h) au voisinage de 0 .



Rem :

- La distance MM' mesure la valeur absolue de l'erreur commise.
- Une autre droite passant par A fournirait une autre approximation affine de f (a + h) , mais celle donnée par la tangente est la meilleure. *(admis …mais intuitif)*

Ex :

Le nombre dérivé de la fonction f : x ⟼ x ² en un réel a est f '(a) = 2 a

Au voisinage de 0, on a donc (a + h) ² ≈ a ² + 2a h

Par exemple , (3 ,01) ² = (3 + 0,01) ²

Ainsi (3 ,01) ² ≈ 9 + 2 × 3 × 0 ,0 1 , soit (3 ,01) ² ≈ 9,06

Dans ce cas il est possible de déterminer l'erreur commise ; elle est de h ² , c'est à dire 0,0001 .

Quelques cas à retenir :

Au voisinage de 0 :

$(1+h)^2 \approx 1 + 2h$; $(1+h)^3 \approx 1 + 3h$; $\frac{1}{1+h} \approx 1 - h$; $\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{1}{2}h$

C) UN PEU DE PHYSIQUE : INTERPRETATION CINEMATIQUE DU NOMBRE DERIVE

Un mobile ponctuel se déplace sur un axe.
On note d (t) , la distance qu'il a parcourue à l'instant t . (loi horaire)
Comme vous l'avez peut-être vu en physique, la vitesse instantanée du mobile à l'instant to est la limite des vitesses moyennes $\frac{d(to+h)-d(to)}{h}$ lorsque h tend vers 0 .
Il s'agit du nombre dérivée en to de la fonction d .

Rem :
On retrouve ces résultats dans d'autres domaines scientifiques…
Le taux de variation $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ mesure en général la variation moyenne d'une grandeur sur un certain intervalle (débit moyen , coût moyen de production …).

Le nombre dérivé, lui, est une mesure instantanée (débit instantané , coût marginal …) .

4) FONCTIONS DERIVEES

A) DEFINITION

On dit qu'une fonction f est **dérivable** sur un intervalle I ($I \subset Df$) si pour tout x appartenant à I , le nombre dérivé de f en x existe .
La fonction dérivée de f sur I est la fonction , notée **f '**, qui , à tout x de I , associe le réel f ' (x) .

Cette définition s'étend à une réunion d'intervalles disjoints.

Par abus de langage, on dit que f ' est « la dérivée de f »

Ex : La fonction $f : x \longmapsto x^2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $f' : x \longmapsto 2x$

On appelle **ensemble de dérivabilité** de la fonction f , l'ensemble sur lequel la fonction dérivée f 'est définie .
Cet ensemble (noté Df ') est toujours inclus dans Df .

B) DERIVEES DE QUELQUES FONCTIONS DE REFERENCE

fonction f	fonction dérivée f '	ensemble de dérivabilité
$f : x \longmapsto k$ ($k \in \mathbb{R}$)	$f' : x \longmapsto 0$	$\mathbb{R}$
$f : x \longmapsto x$	$f' : x \longmapsto 1$	$\mathbb{R}$
$f : x \longmapsto \sqrt{x}$	$f' : x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0 ; +\infty[$

Cette fonction n'est pas dérivable en 0

Preuve :

1) Soit $a \in \mathbb{R}$.
Pour $h \neq 0$, on a : $t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{k-k}{h} = 0$, donc $\lim_{h \to 0} t(h) = 0$
Ainsi f est dérivable en a et $f'(a) = 0$, ce qui est vrai pour tout réel a …

2) Soit $a \in \mathbb{R}$.
Pour $h \neq 0$, $t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{a+h-a}{h} = 1$, donc $\lim_{h \to 0} t(h) = 1$
Ainsi f est dérivable en a et $f'(a) = 1$, ce qui est vrai pour tout réel a …

3)

Si a > 0 .
Pour $h \neq 0$, $t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \frac{\left(\sqrt{a+h}-\sqrt{a}\right)\times\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}{h\times\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} = \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$
Or $\lim_{h \to 0} \sqrt{a+h} = \sqrt{a}$, donc $\lim_{h \to 0} t(h) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

5) OPERATIONS SUR LES FONCTIONS DERIVABLES

A) SOMME , PRODUIT …

D représente un intervalle ou une réunion d'intervalles disjoints .

Soit u et v deux fonctions dérivables sur D et k un réel , alors :

- les fonctions k u , u + v et u . v sont dérivables sur D et :

$$(k\,u)' = k\,u' \quad , \quad (u+v)' = u' + v' \quad \text{et} \quad (u.v)' = u'.v + u.v'$$

- si pour tout réel a de D , v (a) ≠ 0 , les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur D et :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad , \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$$

Preuve :

1) Soit a ∈ D

Pour $h \neq 0$, $t(h) = \frac{(ku)(a+h) - (ku)(a)}{h} = k \times \frac{u(a+h) - u(a)}{h}$, donc $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = k\,u'(a)$

Ainsi ku est dérivable en a et (k u) ' (a) = k u ' (a) , ce qui est vrai pour tout a ∈ D …

2)

Soit a ∈ D

Pour $h \neq 0$, $t(h) = \frac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h} = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} + \frac{v(a+h) - v(a)}{h}$

Or u et v sont dérivables en a , donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$ et $\lim\limits_{h \to 0} \frac{v(a+h) - v(a)}{h} = v'(a)$

Ainsi u + v est dérivable en a et $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = u'(a) + v'(a)$

On en déduit que (u + v)' (a) = u ' (a) + v ' (a) , ce qui est vrai pour tout a ∈ D …

3)

Soit a ∈ D

Pour $h \neq 0$, $t(h) = \frac{(u\,v)(a+h) - (u\,v)(a)}{h} = \ldots = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} v(a+h) + \frac{v(a+h) - v(a)}{h} u(a)$

Or u et v sont dérivables en a , donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$ et $\lim\limits_{h \to 0} \frac{v(a+h) - v(a)}{h} = v'(a)$

De plus $\lim\limits_{h \to 0} v(a+h) = v(a)$

…

4) Soit a ∈ D pour $h \neq 0$, $t(h) = \frac{\frac{1}{v(a+h)} - \frac{1}{v(a)}}{h} = \frac{v(a) - v(a+h)}{h\,v(a)\,v(a+h)} = -\frac{v(a+h) - v(a)}{h} \times \frac{1}{v(a)\,v(a+h)}$

…

5) $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$ …

B) CONSEQUENCES : de nouvelles formules à retenir

fonction f	fonction dérivée f '	ensemble de dérivabilité
$f : x \longmapsto x^2$	$f' : x \longmapsto 2x$	$\mathbb{R}$
$f : x \longmapsto x^3$	$f' : x \longmapsto 3x^2$	$\mathbb{R}$
$f : x \longmapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$f' : x \longmapsto n x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f : x \longmapsto \frac{1}{x}$	$f' : x \longmapsto -\frac{1}{x^2}$	$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$
$f : x \longmapsto \frac{1}{x^2}$	$f' : x \longmapsto -\frac{2}{x^3}$	$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$
$f : x \longmapsto \frac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$f' : x \longmapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

Rem : Pour $x \neq 0$, on a $\frac{1}{x^n} = x^{-n} = x^m$ et $-\frac{n}{x^{n+1}} = (-n)\, x^{-n-1} = \ldots = m\, x^{m-1}$ (avec $m = -n$)

Ainsi la dérivée de $f : x \longmapsto x^n$ est vraie pour tout entier n (en n'oubliant pas $x \neq 0$ si $n < 0$)

C) POLYNÔMES ET FONCTIONS RATIONNELLES

Ex :

deg (P') = deg (P) – 1 si deg (P) > 0

- Soit P le polynôme définie sur IR par $P : x \longmapsto 3x^3 + 5x^2 - x + 3$.

P est une somme de fonctions dérivables sur IR , donc P est dérivable sur IR et pour tout réel x :
$P'(x) = 3 \times 3x^2 + 5 \times 2 \times x - 1 + 0 = 9x^2 + 10x - 1$

Toute fonction polynôme est dérivable sur IR

- Soit f la fonction rationnelle définie par $f : x \longmapsto \frac{2x^2+1}{x-1}$

On peut écrire $f = \frac{u}{v}$ où $u : x \longmapsto 2x^2 + 1$ et $v : x \longmapsto x - 1$

On a $v(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, ainsi $Df = IR - \{1\}$
u et v sont dérivables sur IR donc sur $IR - \{1\}$ et v ne s'annule pas sur $IR - \{1\}$, donc f est dérivable sur $IR - \{1\}$ et pour tout $x \neq 1$, on a :

$$f'(x) = \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{4x(x-1) - (2x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{4x^2 - 4x - 2x^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 1}{(x-1)^2}$$

Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

6) DERIVE DE $f : x \longmapsto g(ax+b)$ (admis)

Soit g une fonction dérivable sur un intervalle I . Pour tout réel x , tel que $ax + b \in I$, la fonction $f : x \longmapsto g(ax+b)$ est dérivable et : **$f'(x) = a\, g'(ax+b)$**

Ex :

Soit f la fonction définie par $f : x \longmapsto \sqrt{3x+6}$
$3x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$, ainsi $Df = [-2 ; +\infty[$
Pour tout $x \geq -2$, on peut écrire $f(x) = g(3x+6)$ où g est la fonction racine carrée $g : t \longmapsto \sqrt{t}$
La fonction g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et pour tout $t > 0$, $g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$
On a $3x + 6 > 0 \Leftrightarrow x > -2$
Ainsi f est dérivable sur $]-2 ; +\infty[$ et pour tout $x > -2$: $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+6}}$

7) FONCTION SINUS ET FONCTION COSINUS

fonction f	fonction dérivée f '	ensemble de dérivabilité
$f : x \longmapsto \sin x$	$f' : x \longmapsto \cos x$	IR
$f : x \longmapsto \cos x$	$f' : x \longmapsto -\sin x$	IR