LIMITES DE FONCTIONS

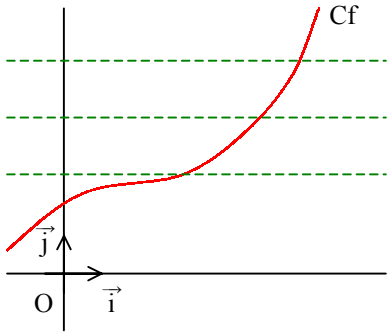
1) LIMITE en + ∞ et en – ∞

A) LIMITE INFINIE en + ∞ et en – ∞

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme [a ; + ∞ [où a est un réel .
Si ***« f (x) est aussi grand que l'on veut dès que x est assez grand »*** , alors on dit que f a pour limite + ∞ en + ∞ .

On note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$



Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grande , la courbe Cf finit par se situer au dessus de n'importe quelle droite horizontale .

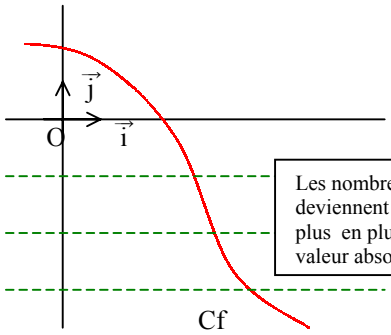
Rem :

- De manière plus mathématique (moins intuitive …) :
  Pour tout réel M > 0 , il existe un réel m tel que , si x > m , alors f (x) > M .
- On dit aussi que la fonction f tend vers + ∞ quand x tend vers + ∞ .

Exemples à connaître : $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

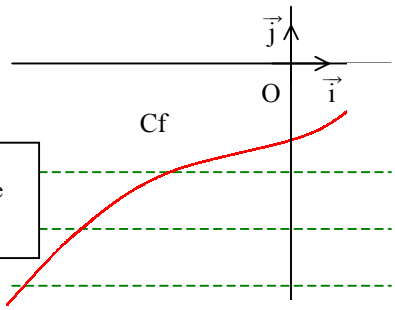
On définit de la même façon …

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

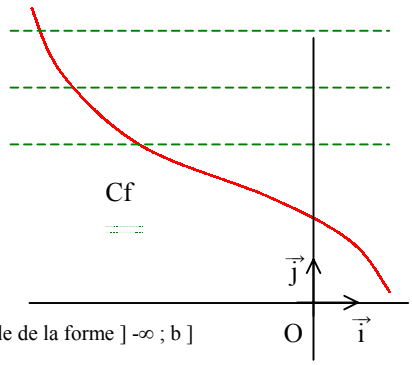


Les nombres f (x) deviennent négatifs et de plus en plus grand en valeur absolue

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



Dans ces deux cas, f est définie sur un intervalle de la forme] -∞ ; b]

Rem :

- Dans la pratique, on peut utiliser la remarque suivante : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(-x)$
- Tout devient si simple quand f est paire ou impaire …

Ex : $\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$ $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

B) LIMITE FINIE en + ∞ et en – ∞ ET ASYMPTOTE HORIZONTALE

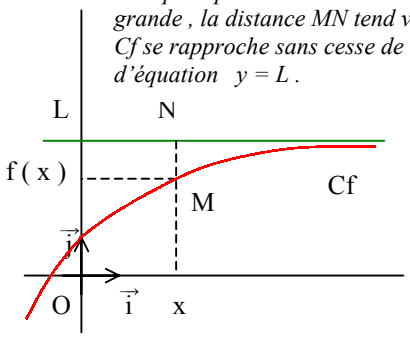
Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme [a ; + ∞ [où a est un réel et L un réel donné .

- Intuitivement, dire que f a pour limite L en + ∞ , signifie que lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes vers + ∞ , les nombres f (x) correspondants viennent s'accumuler autour de L .
  C'est à dire que pour tout ε (ε > 0) , aussi petit qu'il soit, les nombres f (x) finissent par se situer dans l'intervalle] L – ε ; L + ε [.
  On note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

- On dit que la droite d'équation y = L est **asymptote horizontale** à la courbe Cf en + ∞ .

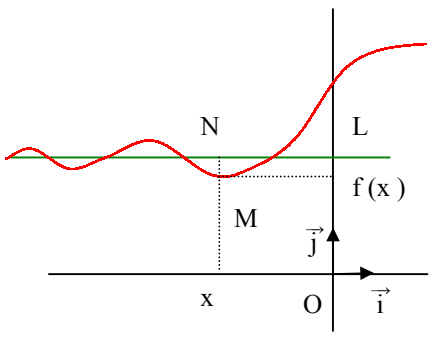
Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grande , la distance MN tend vers 0 . La courbe Cf se rapproche sans cesse de la droite d'équation y = L .



On définit de la même façon

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

f est définie sur un intervalle de la forme] - ∞ ; b]



La distance MN tend vers 0 quand x tend vers - ∞ .

La droite d'équation y = L est **asymptote horizontale** à la courbe Cf en - ∞ .

Exemples à connaître :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$

La courbe représentant la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ admet l'axe des abscisses comme asymptote en $+\infty$; les trois autres courbes admettent cet axe comme asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$

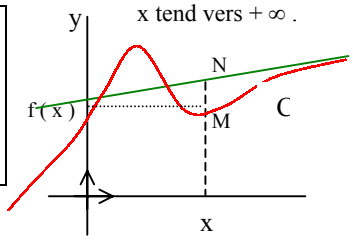
Rem : Une fonction n'a pas forcément une limite finie ou infinie quand x tend vers $+\infty$. (Par exemple $x \longmapsto \sin x$, $x \longmapsto \cos x$ …)

C) ASYMPTOTE OBLIQUE

Soit a ($a \neq 0$) et b deux réels et C la courbe représentant une fonction f dans un repère.
Dire que la droite d'équation $y = a x + b$ est asymptote oblique à C en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) revient à dire que :

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (a x + b)) = 0$ (respectivement $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (a x + b)) = 0$)

La distance MN tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.



Rem :
Une fonction peut avoir une limite infinie lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ sans que sa courbe posséde une asymptote (c'est le cas de la fonction carré)

2) LIMITE en a (avec a réel)

Lorsque que l'on définit la limite d'une fonction f en un réel a , on considère que :

- $a \in Df$
- **ou** a est une borne de Df

A) LIMITE INFINIE en a ET ASYMPTOTE VERTICALE

Lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a ,la courbe Cf finit par se situer au dessus (et en dessous pour la deuxième figure) de n'importe quelle droite horizontale .

Soit f une fonction .

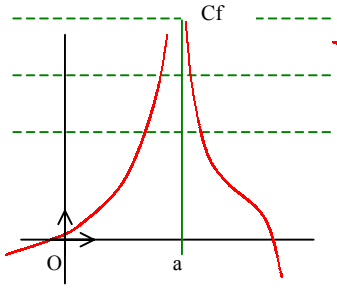
- Si *« f (x) est aussi grand que l'on veut dès que x est assez proche de a »* , alors on dit que f a pour limite $+\infty$ en a .

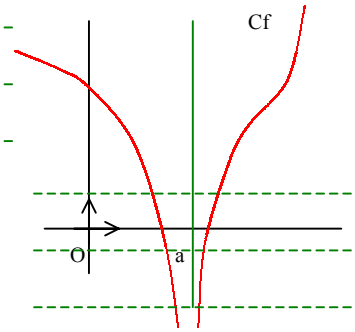
On note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

On définit de la même façon $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

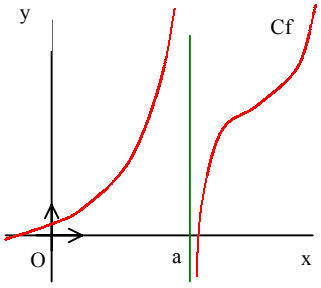
- On dit que la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à la courbe Cf .





Rem :
Il arrive souvent qu'on soit amené à définir des limites *« d'un seul côté de a »* . De manière plus mathématique, cela signifie que la restriction de f à] a , c] et la restriction de f à [b ; a [n'admettent pas la même limite en a .
Naturellement, on introduit les notions de **limite à droite en a** et de **limite à gauche en a** et on note :

$\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ ou encore $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$



Dans ce cas

$\lim\limits_{x \to a+} f(x) = -\infty$

et $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = +\infty$

Ex :

- $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{x^3} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{1}{x^3} = -\infty$

Les courbes représentant ces fonctions admettent l'axe des ordonnées comme asymptote verticale .

B) LIMITE FINIE en a

On a déjà vu la notion de limite finie en zéro dans le chapitre sur la dérivation.
La notion de limite finie en a est identique …

Rem :

On admet que si une fonction f est définie en a et si f admet une limite finie en a , alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

C'est le cas, en tout point de l'ensemble de définition, des fonctions polynômes, rationnelles et trigonométriques, de la fonction racine carrée …et des composées de ces fonctions.
Cette remarque nous permet de déterminer rapidement la limite d'une telle fonction en tout point de son ensemble de définition.

Ex : $\lim\limits_{x \to 3} \sin (3 x + 4) = \sin 13$, $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x^2 + 3} = \sqrt{19}$

Attention, comme nous le verrons en exercice, toutes les fonctions n'admettent pas forcément une limite finie en tout point de leur ensemble de définition . *(la limite à droite et la limite à gauche peuvent être différentes…)*

3) OPERATION SUR LES LIMITES

Les théorèmes qui suivent, présentés sous forme de tableau sont admis.
Pour la plupart d'entre eux , ils sont naturels mais … comme souvent en math, il y a quelques cas particuliers.

Par convention et pour simplifier :

- on note lim f et lim g les limites de f et de g , toutes les deux en a , en $+\infty$ ou en $-\infty$
- on note par un point d'interrogation (?) les cas où il n'y a pas de conclusion générale .
  On dit qu'il s'agit de cas **de formes indéterminées .** Ces cas nécessiteront une étude particulière chaque fois qu'ils se présenteront.

Limite de k f (où k est un réel donné)

lim f	L	$+\infty$	$-\infty$
lim k f (avec k > 0)	k L	$+\infty$	$-\infty$
lim k f (avec k < 0)	k L	$-\infty$	$+\infty$

Ex : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g : x \longmapsto -\frac{2}{x^2}$.

On a $g = -2\,f$ avec $f : x \longmapsto \frac{1}{x^2}$

On en déduit ($-2 < 0$) que : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0+} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0-} g(x) = -\infty$

Limite de f + g

lim f	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
lim g	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
lim (f + g)	L + L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Ex : Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h : x \longmapsto \sqrt{x} - \frac{2}{x^2}$.

On a $h = f + g$ avec $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ et $g : x \longmapsto -\frac{2}{x^2}$

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$; donc $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

Limite de f. g

lim f	L	L > 0	L > 0	L < 0	L < 0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
lim g	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
lim (f .g)	L × L'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Ex : Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+$ par $h : x \longmapsto (x+2)\sqrt{x}$

On a $h = f \times g$ avec $f : x \longmapsto x + 2$ et $g : x \longmapsto \sqrt{x}$

On sait que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$; donc $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0$

Limite de $\frac{f}{g}$

Cas où la limite de g n'est pas nulle — Cas où la limite de g est nulle

lim f	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	L > 0 ou $+\infty$	L > 0 ou $+\infty$	L < 0 ou $-\infty$	L < 0 ou $-\infty$	0
lim g	L'	$+\infty$ ou $-\infty$	L' > 0	L' < 0	L' > 0	L' < 0	$+\infty$ ou $-\infty$	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
lim $\frac{f}{g}$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Rem : « 0 en restant négative ou positive » signifie que g garde un signe constant au voisinage de a , en $+\infty$ ou en $-\infty$ suivant les cas .

Ex : Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h : x \longmapsto \frac{2x-4}{\sqrt{x}}$

On a $h = \frac{f}{g}$ ou $f : x \longmapsto 2x - 4$ et $g : x \longmapsto \sqrt{x}$

On sait que $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = -4$ et $\lim\limits_{x \to 0+} g(x) = 0$; d'autre part, pour tout $x > 0$, $\sqrt{x} > 0$; d'où $\lim\limits_{x \to 0+} h(x) = -\infty$