Suites numériques

Exercice 1

On donne, dans le tableau suivant, le nombre d'inscrits sur la liste électorale d'une petite commune pour les années de 1990 à 2000.

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Nombre d'inscrits	1323	1313	1304	1297	1288	1289	1281	1271	1258	1248	1243

1°) On note P_n le nombre d'inscrits sur la liste électorale pour l'année n.
Donner la valeur de P_{1992} et P_{1998}

2°) Calculer $P_{1994} - P_{1993}$. Que représente ce nombre ?
Calculer $P_{1995} - P_{1994}$. Que représente ce nombre ?

3°) Peut-on dire que la suite des nombres P_n est une suite décroissante lorsque n varie de 1990 à 2000 ?

4°) Représenter graphiquement la suite (P_n).

Exercice 2

On définit une suite (u_n) par : $u_n = 17\,243 - 8n$ pour tout entier n.

On a par exemple, en remplaçant n par 10 : $u_{10} = 17\,243 - 8 \times 10 = 17\,163$

1°) Calculer u_0 ; u_1 ; u_{1990} ; u_{1991} ; u_{1992} .

2°) Calculer $u_1 - u_0$; $u_{1991} - u_{1990}$; $u_{1992} - u_{1991}$

3°) En remplaçant n par n+1 dans l'expression de u_n montrer que
pour tout entier n : $u_{n+1} = 17\,235 - 8n$
En déduire que, pour tout entier n : $u_{n+1} - u_n = -8$

4°) En utilisant la relation $u_{n+1} - u_n = -8$, c'est-à-dire $u_{n+1} = u_n - 8$ compléter le tableau suivant.
La suite (u_n) est-elle une suite décroissante ?

n	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
u_n	1 323										

5°) Représenter graphiquement la suite (u_n) lorsque n varie de 1990 à 2000.

Remarque

La suite (u_n) de l'exercice 2 prend à peu près les mêmes valeurs que la suite (P_n) de l'exercice 1.
On peut dire que la suite (u_n) est un modèle mathématique de la suite (P_n).
Tous les points représentant la suite (u_n) sont alignés. En effet l'accroissement lorsque l'on passe d'un terme au terme suivant est toujours le même, il est égal à -8. On dit que cet accroissement est constant.

Remarque

Les différents termes d'une suite de nombres, se notent souvent sous la forme u_n ou $u(n)$.
Le nombre n qui s'appelle l'indice est un nombre entier naturel.
On peut définir une suite de nombres u(n) de différentes façons :

- par la donnée explicite de ses termes, un tableau par exemple. (voir exercice 1)
- par l'expression de u(n) en fonction de n . (voir exercice 2)
- par la donnée d'un terme et d'une relation de récurrence, c'est-à-dire une relation donnant le terme d'indice n+1 en fonction du terme d'indice n (voir exercice 2, question 4)

Définition

On dit qu'une suite u(n) est croissante si pour tout entier n on a : $u(n) \leq u(n+1)$
On dit qu'une suite u(n) est décroissante si pour tout entier n on a : $u(n) \geq u(n+1)$

Définition

On dit qu'une suite est **arithmétique** si l'accroissement lorsqu'on passe d'un terme au terme suivant est un **accroissement constant**. Cet accroissement est appelé la raison de la suite arithmétique.
Une suite est arithmétique s'il existe un nombre r tel que pour tout entier n : $u(n+1) = u(n) + r$
On dit qu'une qu'une **suite arithmétique** est une **suite à croissance linéaire**.

Exemple

La suite (u_n) de l'exercice 2 est une suite arithmétique de raison -8 .
En effet on a montré que pour tout entier n on a : $u_{n+1} = u_n - 8$

Propriété

Lorsqu'une suite est arithmétique sa représentation graphique est constitué de points alignés.
Lorsque la représentation graphique d'une suite est constituée de points alignés, cette suite est arithmétique.

Exercice 3

On considère u(n) une suite arithmétique de raison r.

1°) Justifier que u(3) = u(2) + r et que u(4) = u(3) + r
En déduire que u(4) = u(2) + 2r

2°) Montrer que u(8) = u(5) + 3r

3°) Quelle relation peut-on écrire entre u(7) , u(2) et r ? Justifier.

4°) On suppose dans cette question que u(0) = 4 et r = 2.
Calculer u(5) .
Donner sans démonstration la valeur de u(100) .

Propriété

Soit u(n) une suite arithmétique de raison r.
Pour tout entier naturel n et tout entier naturel p, on a u(n) = u(p) + (n - p) r

Exercice 4

Le 01/01/2000 un journal compte 12 000 abonnés.
Le service des abonnements a noté que, chaque mois, 1 000 abonnements arrivent à échéance.
Sur ces 1 000 abonnements, 750 sont renouvelés.
De plus chaque mois 320 nouveaux abonnements sont souscrits.
1°) On note u(1) le nombre d'abonnés à la date du 01/01/2000. Quelle est la valeur de u(1) ?
2°) On note u(2) le nombre d'abonnés à la date du 01/02/2000. Quelle est la valeur de u(2) ?
3°) On note u(3) ; u(4) ; … ; u(12) le nombre d'abonnés aux dates respectives du 01/03/2000 ; 01/04/2000 ; … ; 01/12/2000.
a) Montrer que la suite u(n) est une suite arithmétique et donner sa raison.
b) Calculer u(12).
c) En supposant que les conditions restent identiques, déterminer le nombre d'abonnés au journal à la date du 01/12/2002.

Exercice 5

Un capital de 12 618 euros est placé le 01/01/2000 avec un taux d'intérêt annuel de 6,3%.
Tous les ans les intérêts sont cumulés au capital.
On note C(0) le capital correspondant au 1er janvier de l'année 2000. On a donc C(0) = 12 618.
On note, pour tout entier n, C(n) le capital correspondant au 1er janvier de l'année 2000+n.

1°) Calculer C(1), C(2), C(3). (on arrondira les résultats au centime d'euro près)
2°) Démontrer que pour tout entier n on a C(n+1) = C(n) x 1,063.
3°) Compléter le tableau suivant (on arrondira les résultats au centime d'euro près)

Rang n de l'année	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Capital C(n)	12 618										

4°) Représenter graphiquement la suite C(n).

Remarque

On observe graphiquement que la suite C(n) est une suite croissante.
On pourrait le démontrer en comparant C(n) et C(n+1).
Les points représentant la suite C(n) ne sont pas alignés. La suite n'est pas une suite arithmétique.

Définition

Une suite est **géométrique** s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n : u(n+1) = u(n) x q
Le nombre q est appelé la raison de la suite géométrique.

Une suite géométrique est une suite ayant un **accroissement relatif constant**, cela revient à dire que le rapport $\frac{u(n+1)}{u(n)}$ est constant.

On dit qu'une qu'une **suite géométrique** est une **suite à croissance exponentielle**.

Exemple

La suite C(n) de l'exercice 4 est une suite géométrique de raison 1,063 .
En effet on a montré que pour tout entier n on a : $C(n+1) = C(n) \times 1{,}063$

Exercice 6

On considère v(n) une suite géométrique de raison q.

1°) Justifier que $v(3) = v(2) \times q$ et que $v(4) = v(3) \times q$
En déduire que $v(4) = v(2) \times q^2$

2°) Montrer que $v(8) = v(5) \times q^3$

3°) Quelle relation peut-on écrire entre v(7) , v(2) et q ? Justifier.

4°) On suppose dans cette question que $v(0) = 3$ et $q = 2$.
Calculer v(5) .
Donner sans démonstration la valeur de v(100) .

Propriété

Soit u(n) une suite géométrique de raison q.
Pour tout entier naturel n et tout entier naturel p, on a $u(n) = u(p) \times q^{(n-p)}$

Exercice 7

Un village avait 3123 habitants en 1995. Le nombre d'habitants diminue de 12% tous les ans.
On note P(n) le nombre d'habitants du village pour l'année n.

1°) Donner les valeurs de P(1995) et P(1996). (on arrondira à l'entier le plus proche)

2°) Justifier que la suite P(n) est une suite géométrique et donner sa raison.

3°) Calculer P(2001). (on arrondira à l'entier le plus proche)

4°) En quelle année le nombre d'habitants aura-t-il diminué des deux tiers par rapport à 1995 ?

5°) Représenter graphiquement la suite P(n) pour n variant de 1995 à 2005.

Exercice 8

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u(n)											
Δ(n)											
S(n)											

1°) On considère la suite de nombres : u(0) = 1 ; u(1) = 2 ; u(2) = 4 ; u(3) = 8 ; u(4) = 15 ; u(5) = 23
u(6) = 32 ; u(7) = 44 ; u(8) = 58 ; u(9) = 73 ; u(10) = 91
Recopier et compléter le tableau ci-dessus.
La suite Δ(n) est la suite des différences premières $\Delta(n) = u(n+1) - u(n)$.
On a par exemple $\Delta(0) = u(1) - u(0) = 2 - 1 = 1$ et $\Delta(1) = u(2) - u(1) = 4 - 2 = 2$
La suite S(n) est la suite des différences secondes $S(n) = \Delta(n+1) - \Delta(n)$.
On a par exemple $S(0) = \Delta(1) - \Delta(0) = 2 - 1 = 1$
Justifier que la suite u(n) est croissante et que cette croissance est en augmentation.

2°) On considère la suite u(n), arithmétique de premier terme 2 et de raison 3.
Recopier et compléter le tableau ci-dessus.
Que peut-on dire du sens de variation de la suite u(n) ?

3°) On considère la suite u(n), géométrique de premier terme 1 et de raison 2.
Recopier et compléter le tableau ci-dessus.
Que peut-on dire du sens de variation de la suite u(n) ?