Texp **Devoir n ° 8**

- Durée 1 h
- Calculatrices autorisées



Nom :

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}-4 & 6\\ -3 & 5\end{pmatrix}$

2pts **1.** On appelle I la matrice identité d'ordre 2 . Déterminer $p\in\mathbb{N}$, tel que $A^2=A+pI$

3pts **2.** En déduire une expression de A^3 et une expression de A^4 sous la forme $\alpha A+\beta I$ où α et β sont des réels

3pts **3.** On considère les suites (r_n) et (s_n) définies par $r_0=0$ et $s_0=1$ et, pour tout entier naturel n , $\begin{cases} r_{n+1}=r_n+s_n \\ s_{n+1}=2r_n \end{cases}$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $\mathrm{A}^n=r_n\mathrm{A}+s_n\mathrm{I}$

2pts **4.** Démontrer que la suite (k_n) définie pour tout entier naturel n par $k_n = r_n - s_n$ est géométrique.

En déduire, pour tout entier naturel n, une expression explicite de k_n en fonction de n.

2pts **5.** On admet que la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par . $t_n = r_n + \frac{(-1)^n}{3}$ est géométrique de raison 2.
En déduire, pour tout entier naturel n, une expression explicite de t_n en fonction de n.

2pts **6.** Déduire des questions précédentes, pour tout entier naturel n, une expression explicite de r_n et s_n en fonction de n.

3pts **7.** En déduire alors, pour tout entier naturel n , une expression des coefficients de la matrice A^n .

3pts **8.** En utilisant la question 2, exprimer I comme une combinaison linéaire de A^3 et A^4 , puis en déduire l'inverse de la matrice A^3 .

1. $A^2 = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16-18 & -24+30 \\ 12-15 & -18+25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$.

$A+2I = \begin{pmatrix} -4+2 & 6 \\ -3 & 5+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = A^2$.

2. En partant de l'égalité $A^2 = A+2I$, on obtient en multipliant chaque membre par A :
$A^3 = A(A+2I) = A^2+2A = A+2I+2A = 3A+2I$ et on recommence :
$A^4 = A \times A^3 = A(3A+2I) = 3A^2+2A = 3(A+2I)+2A = 5A+6I$.

3. Démonstration par récurrence :
Initialisation : Pour $n=0$, $A^0 = I = 0A+1I = r_0A+s_0I$. la relation est vraie au rang 0.
Hérédité : Supposons qu'il existe un naturel p non nul, tel que $A^p = r_pA+s_pI$.
En multipliant chaque membre par A, on obtient :
$A \times A^p = A(r_pA+s_pI) \iff A^{p+1} = r_pA^2+s_pA = r_p(A+2I)+s_pA =$
$(r_p+s_p)A+2r_pI = r_{p+1}A+s_{p+1}I$: la relation est donc vraie au rang $p+1$.
On a donc démontré par récurrence que, pour tout entier naturel n,
$A^n = r_nA+s_nI$.

4. On a pour tout entier naturel n :
$k_{n+1} = r_{n+1}-s_{n+1} = r_n+s_n-2r_n = s_n-r_n = -(r_n-s_n) = -k_n$.
L'égalité $k_{n+1} = -k_n$ montre que la suite (k_n) est géométrique de raison -1.
On sait qu'alors $k_n = k_0(-1)^n = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$.

5. On a donc $t_1 = r_1 + \dfrac{(-1)^1}{3} = 1-\dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.
On sait qu'alors $t_n = \dfrac{2}{3} \times 2^{n-1}$

6. On a donc $r_n = t_n - \dfrac{(-1)^n}{3} = \dfrac{2}{3} \times 2^{n-1} - \dfrac{(-1)^n}{3}$.
Or $s_n = r_n - k_n$, donc
$s_n = \dfrac{2}{3} \times 2^{n-1} - \dfrac{(-1)^n}{3} - (-1)^{n+1} = \dfrac{2}{3} \times 2^{n-1} - \dfrac{(-1)^n}{3} + (-1)^n =$
$s_n = \dfrac{2}{3} \times 2^{n-1} + \dfrac{2}{3} \times (-1)^n$.

7. Finalement de $A^n = r_nA+s_nI = \begin{pmatrix} -4r_n & 6r_n \\ -3r_n & 5r_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_n & 0 \\ 0 & s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4r_n+s_n & 6r_n \\ -3r_n & 5r_n+s_n \end{pmatrix}$, on en déduit les quatre coefficients de A^n.

- $-4r_n+s_n = -\dfrac{8}{3}2^{n-1} + \dfrac{4}{3} \times (-1)^n + \dfrac{2}{3}2^{n-1} + \dfrac{2}{3} \times (-1)^n = -2^n + 2 \times (-1)^n$;
- $6r_n = 2^{n+1} - 2 \times (-1)^n$;
- $-3r_n = -2^n + (-1)^n$;
- $5r_n+s_n = \dfrac{10}{3}2^{n-1} - \dfrac{5}{3} \times (-1)^n + \dfrac{2}{3}2^{n-1} + \dfrac{2}{3} \times (-1)^n = 2^{n+1} - (-1)^n$.

Conclusion : $A^n = \begin{pmatrix} -2^n+2 \times (-1)^n & 2^{n+1}-2 \times (-1)^n \\ -2^n+(-1)^n & 2^{n+1}-(-1)^n \end{pmatrix}$.

8. On a $3A^4 - 5A^3 = 8I \iff A^3\left(\dfrac{3}{8}A - \dfrac{5}{8}I\right) = I$

On en déduit que A^3 est inversible et que $A^3 = \dfrac{3}{8}A - \dfrac{5}{8}I = \begin{pmatrix} \dfrac{-17}{8} & \dfrac{9}{4} \\ \dfrac{-9}{8} & \dfrac{5}{4} \end{pmatrix}$