Tcomp **Devoir surveillé n ° 8**

- Durée 1h
- Calculatrices autorisées

Barème :	**Nom :**
1) 8 pts **2)** 6 pts **3)** 6 pts	

Ex 1 : Dans un étang, il y a 100 poissons : 90 carpes et 10 brochets.
Elsa souhaite pêcher un brochet de sorte que si elle pêche une carpe, elle la remet à l'eau et continue à pêcher jusqu'à obtenir un brochet.
On appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de prises réalisées par Elsa pour avoir un brochet.
On note B l'événement « Obtenir un brochet »
1) Déterminer (en justifiant) la loi suivie par X et en donner le(s) paramètre(s).

2) Représenter la situation avec un arbre pour les 3 premières répétitions.

3) Quelle est la probabilité qu'elle doive prendre exactement 5 poissons pour obtenir un brochet ?

4) Déterminer $P(X \geqslant 10)$.

5) Elsa peu chanceuse a pêché de manière consécutive 50 carpes …
Quelle est la probabilité qu'elle ait encore besoin de pêcher au moins 6 fois pour obtenir un brochet ?

6) Calculer E(X) et l'interpréter dans les termes de l'énoncé.

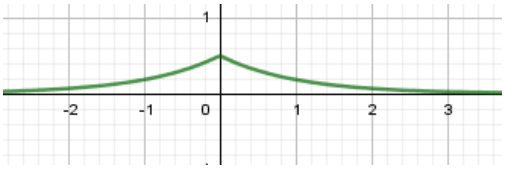
Ex 2 : Un QCM est composé de 10 questions indépendantes. Pour chaque question, cinq réponses sont proposées et une seule de ces cinq réponses est juste.
Un élève répond au hasard aux 10 questions de ce QCM. On appelle N le nombre de réponses justes qu'il obtient.
1) Déterminer (en justifiant) la loi suivie par N et en donner le(s) paramètre(s).

2) Calculer $P(N=10)$ et $P(N\geq 5)$ à 10^{-4} près.

3) Le QCM est noté +2 pour une bonne réponse et 0 pour une mauvaise réponse ? Toute la classe répond au hasard . Que peut-on dire de la moyenne de la classe ?

4) Quelle est la probabilité qu'un élève ait au-dessus de la moyenne ?

Ex 3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$ représentée ci-contre :



1) Montrer que f est une fonction densité d'une variable aléatoire X.

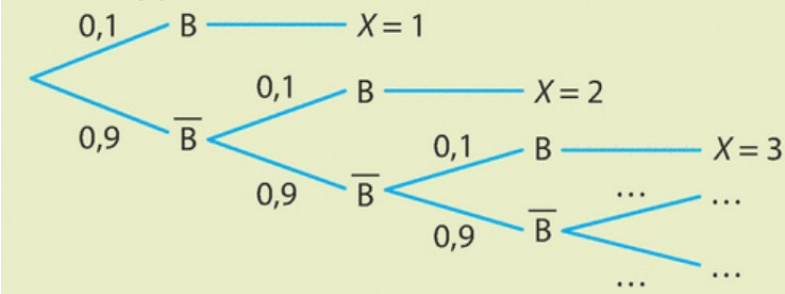
2) Calculer $P(-3\leqslant X\leqslant -2)$.

Correction :

1) On reconnaît un schéma de Bernoulli consistant en la répétition de manière indépendante de l'épreuve de Bernoulli de succès de probabilité $\frac{10}{100}=0,1$

X suit la loi géométrique de paramètre 0,1.

2)



3) $P(X=5)=(1-0,1)^{5-1}\times 0,1\approx 0,07$

4) $P(X\geqslant 10)=P(X>9)=(1-0,1)^{9}=0,9^{9}\approx 0,39$

5) On applique la propriété de « loi sans mémoire » . Attention, pour des entiers au moins 6, revient à dire strictement plus que 5.

$P_{X>50}(X>50+5)=P(X>5)=(1-0,1)^{5}=0,9^{5}\approx 0,59$

6) $E(X)=\frac{1}{0,1}=10$

En moyenne sur un grand nombre de partie de pêche, il faudra à Elsa 10 prises pour avoir un brochet.

Ex 2 :

1) On reconnaît un schéma de Bernoulli consistant en la répétition 10 fois de manière identique et indépendante de l'épreuve de Bernoulli de succès de probabilité $\frac{1}{5}=0,2$.

N suit la loi binomiale de paramètres 10 et 0,2.

2) $P(N=10)=0,2^{10}\approx 0$ et $P(N\geq 5)\approx 0,0328$

3) $E(N)=10\times 0,2=2$

La classe en répondant au hasard peut espérer avoir deux réponses justes par élève, ce qui correspond à une moyenne de 4.

4) $P(N\geq 5)\approx 0,0328$

Ex 3 :

1) f est positive et continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $x>0$,

$\int_0^x \frac{1}{2}\,e^{-|t|}\,dt=\int_0^x \frac{1}{2}\,e^{-t}\,dt=\left[\frac{-1}{2}e^{-t}\right]_0^x=-\frac{1}{2}\,e^{-x}+\frac{1}{2}$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{1}{2}\,e^{-|t|}\,dt=\frac{1}{2}$

De plus f est paire donc, par symétrie on obtient : $\lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^0 \frac{1}{2}\,e^{-|t|}\,dt=\frac{1}{2}$

Ainsi $\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt=1$

2) $P(-3\leqslant X\leqslant -2)=\int_{-3}^{-2}\frac{1}{2}\,e^{-|t|}\,dt=\int_{-3}^{-2}\frac{1}{2}\,e^{t}\,dt=\left[\frac{1}{2}e^{t}\right]_{-3}^{-2}=\frac{1}{2}\,(e^{-2}-e^{-3})\approx 0,043$