Brevet de technicien supérieur - session 2013 - groupement B1 et B2

MCI2 **Devoir Surveillé n ° 3**

- Durée 1 h - Calculatrices autorisées

Barème :	**Nom :**
1)A) 4pts B) 4pts C) 4pts D) 4pts 2) 4pts	

Ex 1 :

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.
Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}

A. Loi de Poisson

On désigne par X la variable aléatoire qui, a tout intervalle de temps d'une durée de 30 secondes, associe le nombre de skieurs se présentant à une remontée mécanique, entre 14 heures et 15 heures. On admet que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 6$.

1. Déterminer la probabilité $P(X = 6)$.
2. Calculer la probabilité que, pendant un intervalle de temps d'une durée de 30 secondes pris au hasard entre 14 heures et 15 heures, il se présente au plus 6 skieurs.

B. Loi normale

Une entreprise découpe une grande quantité de tubes pour le montage des remontées mécaniques. La longueur des tubes est exprimée en millimètres. Un tube est dit « conforme pour la longueur » lorsque celle-ci appartient à l'intervalle [245 ; 255].
On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque tube pris au hasard dans la production d'une journée, associe sa longueur.

1. Après un réglage de la machine, on admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne 250 et d'écart type 3.
   Calculer la probabilité qu'un tube pris au hasard dans la production de cette journée soit conforme pour la longueur.
2. Le résultat obtenu au 1. n'est pas jugé satisfaisant. On décide de modifier l'écart type à l'aide d'un nouveau réglage de la machine. Dans cette question, la variable aléatoire Y suit une loi normale de moyenne 250 et d'écart type σ.
   Déterminer l'écart type σ pour que $P(245 \leqslant Y \leqslant 255) = 0{,}97$.

C. Loi binomiale

Dans un lot de tubes, 3 % des tubes ne sont pas conformes pour la longueur. On prélève au hasard 50 tubes de ce lot. Le lot est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 lots.
On considère la variable aléatoire Z qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de tubes qui ne sont pas conformes pour la longueur.

1. Justifier que la variable aléatoire Z suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité $P(Z = 0)$.
3. Calculer la probabilité que dans un tel prélèvement au moins un tube ne soit pas conforme pour la longueur.

D. Test d'hypothèse

On se propose de construire un test d'hypothèse pour contrôler la moyenne μ inconnue des longueurs, exprimées en millimètres, d'un lot important de tubes destinés au montage des remontées mécaniques.
On désigne par $\overline{L}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 50 tubes prélevés au hasard dans ce lot, associe la moyenne des longueurs de ces tubes (le lot est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise).
L'hypothèse nulle est $H_0 : \mu = 250$. Dans ce cas, on considère que le lot est conforme.
L'hypothèse alternative est $H_1 : \mu \neq 250$.
Le seuil de signification du test est fixé à 5 %.

1. Sous l'hypothèse nulle H_0, on admet que la variable aléatoire $\overline{L}$ suit la loi normale de moyenne 250 et d'écart type 0,33.
   On admet également que $P(249{,}35 < \overline{L} < 250{,}65) = 0{,}95$. Ce résultat n'a pas à être démontré.
   Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.
2. On prélève un échantillon aléatoire de 50 tubes dans le lot et on observe que, pour cet échantillon, la moyenne des longueurs des tubes est $\overline{\ell} = 250{,}49$.
   Peut-on, au seuil de 5 %, conclure que ce lot est conforme ?

Ex 2 :

On considère la fonction f, périodique de période $T = 4$, définie par :

$$f(x) = 2 \quad \text{si} \quad x \in [0\,;\,3[;$$
$$f(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \in [3\,;\,4[.$$

A. …. (non donnée dans ce DS)

B. Calcul des coefficients de Fourier a_n du signal

On note a_n et b_n les coefficients de Fourier de la fonction f.

1. Vérifier que $a_0 = \frac{3}{2}$.
2. **a.** Soit n un entier supérieur ou égal à 1, calculer l'intégrale $I = \int_0^3 \cos\left(n\frac{\pi}{2}t\right)\mathrm{d}t$.
   b. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $a_n = \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{3n\pi}{2}\right)$.
   c. En déduire les valeurs exactes de a_1, a_2 et a_3.

aide - Xcas donne :

```
integrate(cos(n*pi/2*t),t)
```

$$\frac{2*\sin(\frac{n*\pi*t}{2})}{\pi*n}$$

Correction

Ex1 :

A) 1) $P(X=6)=e^{-6}\dfrac{6^6}{6!} \approx$ O,16

2) $P(X\leqslant 6)\approx 0,61$ Xcas : poisson_cdf(6,6)

B) 1) $P(245\leqslant X\leqslant 255)\approx 0,9$ Xcas : evalf(normal_cdf(250,3,245,255))

2) On trouve 2,3 (avec la calculatrice)

C) 1) On reconnaît un schéma de Bernoulli consistant en la répétition 50 fois de manière indépendante de l'épreuve de Bernoulli de succès 0,03. Ainsi Z suit la loi binomiale B(50;0,03)

2) $P(Z=0)\approx 0,22$ Xcas : binomial(50,0.03,0)

3) $P(Z\geqslant 1)=1-P(Z=0)\approx 0,78$

D) 1) On prélève au hasard un échantillon de 50 tubes dont on calcule la moyenne $\bar{l}$ des cotes.

Si $\bar{l} \in$ [249,35;250,65] , on accepte H_0 au seuil 5 %.

Si $\bar{l} \notin$ [249,35;250,65] , on accepte H_1 au seuil 5 %.

2) $\bar{l} \in$ [249,35;250,65] , on accepte H_0 au seuil 5 %.

Ex 2 :

Partie B

1. On a

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{4}\int_0^4 f(t)\,\mathrm{d}x[t] \\ &= \frac{1}{4}\int_0^3 2\,\mathrm{d}x[t] \\ &= \frac{1}{2}\times 3 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{a_0 = \frac{3}{2}}$$

2. a. Soit $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 \cos n\frac{\pi}{2}t\,\mathrm{d}x[t] \\ &= \left[\frac{2}{n\pi}\sin n\frac{\pi}{2}t\right]_0^3 \\ &= \frac{2}{n\pi}\sin 3n\frac{\pi}{2} - \sin(0) \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{I = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{3n\pi}{2}}$$

b. On a :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{4}\int_0^4 f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}x[t] \\ &= \frac{1}{2}\int_0^3 2\times\cos n\frac{\pi}{2}t\,\mathrm{d}x[t] \\ &= I \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n \geqslant 1,\quad a_n = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{3n\pi}{2}}$$

c. On obtient immédiatement

$$\boxed{a_1 = -\frac{2}{\pi},\quad a_2 = 0,\quad a_3 = \frac{2}{3\pi}}$$