AUTO2 **Devoir Surveillé n ° 1**

- Durée 1 h
- Calculatrices autorisées

Barème :	**Nom :**
1) 7 pts **2)** 6 pts **3)** 7 pts	

Commentaires : *Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées .Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez . La rédaction est importante . Soyez propre et clair . Bon courage …*

Ex 1 :

On suppose que le temps d'attente T à un arrêt de bus, exprimé en minutes, suit la loi uniforme sur l'intervalle [0;30].
Exprimer tous les résultats sous forme littérale (par exemple $P(12 \leqslant T \leqslant 18)$) puis donner la valeur exacte.

1) Déterminer la probabilité que la durée d'attente d'une personne prise au hasard soit comprise entre 15 et 25 minutes.

2) Déterminer la probabilité que la durée d'attente d'une personne prise au hasard soit supérieure à 30 minutes.

3) Quel est le temps moyen d'attente à cet arrêt de bus ?

4) Sachant qu'une personne attend le bus depuis 20 minutes, quelle est la probabilité qu'elle attende encore au moins 5 minutes ?

Ex 2 :

On suppose que 5 % des pièces livrées présentent le défaut A. On prélève avec remise 500 pièces du stock. On note Y la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 500 pièces prélevées au hasard dans la production, associe le nombre de pièces présentant le défaut A.

1) Quelle est la loi suivie par Y ?

2) On approche la loi de Y par une loi normale. Quels sont les paramètres de cette loi normale ?

3) On note Z la variable aléatoire suivant cette loi normale. Déterminer la probabilité que le nombre de pièces défectueuses soit inférieur ou égal à 10.

Pour répondre à cette question on calculera $P(Z \leq 10{,}5)$.

Ex 3 :

On lance un dé honnête 200 fois, de façon indépendante.
On note S_{200} la variable aléatoire correspondant à la somme totale des points obtenus.

1) On note X_i la variable aléatoire représentant le nombre de points obtenus au i-ème lancer . Déterminer la loi de probabilité de X_i . En déduire que $E(X_i) = 3{,}5$ et $V(X_i) = \frac{35}{12}$.

2) Exprimer S_{200} en fonction des variables aléatoires X_i .

3) En utilisant le théorème de la limite centrée, on peut approcher S_{200} par une variable aléatoire Z suivant une loi normale. Déterminer les paramètres de cette loi normale.

4) Quelle est la probabilité que la somme totale des points obtenus soit comprise entre 680 et 720 ?

Correction :

Ex 1 :

On suppose que le temps d'attente T à un arrêt de bus, exprimé en minutes, suit la loi uniforme sur l'intervalle [0;30].

1) Déterminer la probabilité que la durée d'attente d'une personne prise au hasard soit comprise entre 15 et 25 minutes.

$$P(15 \leqslant T \leqslant 25) = \frac{25-15}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

2) Déterminer la probabilité que la durée d'attente d'une personne prise au hasard soit supérieure à 30 minutes.

$$P(T \geqslant 30) = 0$$

3) Quel est le temps moyen d'attente à cet arrêt de bus ?

$$\frac{0+30}{2} = 15$$

4) Sachant qu'une personne attend le bus depuis 20 minutes, quelle est la probabilité qu'elle attende encore au moins 5 minutes ?

$$P_{T \geqslant 20}(T \geqslant 25) = \frac{P((T \geqslant 25) \cap (T \geqslant 20))}{P(T \geqslant 20)} = \frac{P(T \geqslant 25)}{P(T \geqslant 20)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Ex 2 :

On suppose que 5 % des pièces livrées présentent le défaut A. On prélève avec remise 500 pièces du stock. On note Y la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 500 pièces prélevées au hasard dans la production, associe le nombre de pièces présentant le défaut A.

1) Quelle est la loi suivie par Y ?

Y suit la loi binomiale B(500;0,05)

2) On approche la loi de Y par une loi normale. Quels sont les paramètres de cette loi normale ?

$E(X) = 500 \times 0{,}05 = 25$ et $\sigma(X) = \sqrt{(500 \times 0{,}05) \times (1-0{,}05)} \approx 4{,}87$

la loi normale est N(25;4,87)

3) On note Z la variable aléatoire suivant cette loi normale. Déterminer la probabilité que le nombre de pièces défectueuses soit inférieur ou égal à 10.

Pour répondre à cette question on calculera $P(Z \leq 10{,}5)$.

$P(Z \leq 10{,}5) \approx 0{,}00145$

Ex 3 :

On lance un dé honnête 200 fois, de façon indépendante.
On note S_{200} la variable aléatoire correspondant à la somme totale des points obtenus.

1) On note X_i la variable aléatoire représentant le nombre de points obtenus au i-ème lancer . Déterminer la loi de probabilité de X_i . En déduire que $E(X_i) = 3{,}5$ et $V(X_i) = \frac{35}{12}$.

k	1	2	3	4	5	6
$P(X_i = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X_i) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5$$

$$V(X_i) = 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{6} + 4^2 \times \frac{1}{6} + 5^2 \times \frac{1}{6} + 6^2 \times \frac{1}{6} - 3{,}5^2 = \frac{35}{12}$$

2) Exprimer S_{200} en fonction des variables aléatoires X_i .

$$S_{200}=\sum_{k=1}^{200} X_i$$

3) En utilisant le théorème de la limite centrée, on peut approcher S_{200} par une variable aléatoire Z suivant une loi normale. Déterminer les paramètres de cette loi normale.

La variable aléatoire S_{200} suit approximativement une loi normale d'espérance $200\times 3{,}5=700$ et d'écart type $\sqrt{\frac{35}{12}}\times\sqrt{200}\approx 24{,}15$

4) Quelle est la probabilité que la somme totale des points obtenus soit comprise entre 680 et 720 ?

$$P(680\leqslant S_{200}\leqslant 720)\approx P(680\leqslant Z\leqslant 720)\approx 0{,}59$$