FEE1 **Devoir Surveillé n ° 5**

- Durée 1 h
- Calculatrices autorisées

Barème :	**Nom :**
1) 12pts **2)** 4 pts **3) 4** pts	

Commentaires : *Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées .Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez . La rédaction est importante . Soyez propre et clair . Bon courage …*

Ex 1 : Brevet de technicien supérieur Métropole – Antilles–Guyane session 2013- groupement B2

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = (0{,}25x)\mathrm{e}^{-0{,}125x^2}$$

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. *Les questions a. et b. suivantes sont des questions à choix multiples. Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification. La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

   a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ est égal à :

$+\infty$	$-\infty$	0

   b. En $+\infty$ la courbe C admet une asymptote d'équation :

$y=-0{,}125x^2$	$y=0$	$x=0$

2. **a.** Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;+\infty[$,

$$f'(x) = 0{,}0625(2+x)(2-x)\mathrm{e}^{-0{,}125x^2}$$

b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

c. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Un logiciel de calcul formel fournit le développement limité de la fonction f, à l'ordre 3, au voisinage de zéro :

$$f(x) = 0{,}25x - 0{,}03125x^3 + x^3\epsilon(X) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0.$$

Ce résultat est admis et n'est donc pas à démontrer.

a. En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

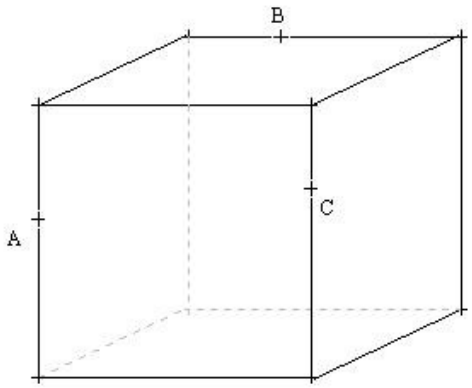
b. Étudier la position relative de T et de C au voisinage du point d'abscisse 0, pour x positif.

Ex 2 :

En utilisant une intégration par partie, calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}\,x$

Ex 3 :

Représenter la section du cube par le plan (ABC) .



Correction :

Ex1 :

1. a. La bonne réponse est la réponse $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-0.125x^2} = 0$.

b. La bonne réponse est la réponse Asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 0$.

2. a. En utilisant la dérivation d'un produit, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0{,}25\mathrm{e}^{-0{,}125x^2} + 0{,}25x(-0{,}125 \times (2x) \times \mathrm{e}^{-0{,}125x^2}) \\ &= (0{,}25 - 0{,}0625x^2)\mathrm{e}^{-0{,}125x^2} \\ &= 0{,}0625(4 - x^2)\mathrm{e}^{-0{,}125x^2} \\ &= 0{,}0625(2-x)(2+x)\mathrm{e}^{-0{,}125x^2} \end{aligned}$$

b. Comme $0{,}0625$, $2+x$ et $\mathrm{e}^{-0{,}125x^2}$ sont positifs lorsque x est positif, le signe de la dérivée ne dépend que du signe de $2 - x$.
Le tableau de signe de la dérivée de f est le suivant :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

c. Tableau de variation de la fonction f

x	0		2		$+\infty$
f	0	↗	$\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}}{2}$	↘	0

On a $f(2) \approx 0{,}303$

3. a. Par troncature à l'ordre 1 du développement limité donné, une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est $y = 0{,}25x$.

b. Pour étudier le positionnement, il convient d'étudier le signe de $-0{,}03125x^3$, signe identique à celui de $-x^3$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x^3$		$+$	0	$-$	

Donc au voisinage de zéro la courbe est en dessous de la tangente (Attention à l'ensemble de définition).

Ex 2 :

En utilisant une intégration par partie, calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}\,x$

Posons $u(x)=x$ $\quad v'(x)=\cos x$
$u'(x)=1$ $\quad v(x)=\sin x$

Les fonctions u et v sont dérivables et leurs dérivées sont dérivables sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. On a alors :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}\,x=\left[x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}\,x=\left[x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\left[x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$$

Ex 3 :

Représenter la section du cube par le plan (ABC) .

