MCI1 **Devoir Surveillé n ° 5**

- Durée 1 h
- Calculatrices autorisées

Barème :	**Nom :**
1) 5 pts 2) 5 pts 3) 4 pts 4) 6 pts	

Commentaires : *Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées .Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez . La rédaction est importante . Soyez propre et clair . Bon courage …*

Ex 1 :

Pierre participe à deux loteries . Pour la première, la probabilité de gagner est de $\frac{1}{5}$ et pour la deuxième la probabilité de gagner est de $\frac{1}{6}$. Les événements G_1 :« gagner à la première loterie » et G_2 :« gagner à le deuxième loterie » sont indépendants.
Dans chaque cas exprimer les probabilités sous forme littérale (Par exemple $P(G_1 \cap \overline{G}_2) = ...$) , puis donner le résultat exact.
Quelle est la probabilité que Pierre :
a) gagne aux deux loteries ?

b) gagne à la première loterie ou à la deuxième loterie ?

c) gagne seulement à la deuxième loterie ?

d) ne gagne à aucune des loteries ?

Ex 2 :

Un constructeur de composants électroniques produit des transistors. On admet que la probabilité qu'un transistor produit soit défectueux est de 5×10^{-3} .
On prélève un lot de 500 transistors dans la production et on suppose que le stock de transistors est suffisamment important pour assimiler le prélèvement à un tirage avec remise de 500 transistors. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 500 transistors, associe le nombre de transistors défectueux.

1) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2) Calculer la probabilité des événements suivants arrondis au millième.

a) « le lot contient exactement 5 transistors défectueux»
b) « le lot contient au plus 2 transistors défectueux »
c) « le lot contient au moins 3 transistors défectueux »

3) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

Ex 3 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \arctan(x^3)$

a) Déterminer l'ensemble de définition de f

b) Étudier les variations de la fonctions f .

c) Dresser le tableau de variation de f en indiquant les limites.

Ex 4 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{3+\cos x}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f .

2) Montrer que la fonction f est paire.

3) Montrer que f est périodique et déterminer sa période.

4) Calculer la fonction dérivée f' et déterminer son signe sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

5) Dresser le tableau de variation de f sur $[-\pi ; \pi]$ et tracer l'allure de la fonction sur $[-2\pi ; 2\pi]$

Correction :

Ex 1 :

Pierre participe à deux loteries . Pour la première, la probabilité de gagner est de $\frac{1}{5}$ et pour la deuxième la probabilité de gagner est de $\frac{1}{6}$.
Les événements G_1 :« gagner à la première loterie » et G_2 :« gagner à le deuxième loterie » sont indépendants.

Dans chaque cas exprimer les probabilités sous forme littérale (Par exemple $P(G_1 \cap \overline{G_2}) = ...$) , puis donner le résultat exact.
Quelle est la probabilité que Pierre :

a) gagne aux deux loteries ?

G_1 et G_2 sont indépendants . On a donc : $P(G_1 \cap G_2) = P(G_1)P(G_2) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$

b) gagne à la première loterie ou à la deuxième loterie ?

$$P(G_1 \cup G_2) = P(G_1) + P(G_2) - P(G_1 \cap G_2) = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

c) gagne seulement à la deuxième loterie ?

$$P(\overline{G_1} \cap G_2) = P(\overline{G_1})P(G_2) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{15}$$

d) ne gagne à aucune des loteries ?

$$P(\overline{G_1} \cap \overline{G_2}) = P(\overline{G_1})P(\overline{G_2}) = \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{2}{3}$$

Ex 2 :

Un constructeur de composants électroniques produit des transistors. On admet que la probabilité qu'un transistor produit soit défectueux est de 5×10^{-3} .
On prélève un lot de 500 transistors dans la production et on suppose que le stock de transistors est suffisamment important pour assimiler le prélèvement à un tirage avec remise de 500 transistors. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 500 transistors, associe le nombre de transistors défectueux.

1) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

L'expérience aléatoire consiste en la répétition 500 fois de manière indépendante de l'épreuve de Bernoulli de succès 5×10^{-3} .
X suit une loi binomiale $B(500, 5 \times 10^{-3})$

2) Calculer la probabilité des événements suivants arrondis au millième.

a) « le lot contient exactement 5 transistors défectueux»

$P(X = 5) \approx 0,067$

b) « le lot contient au plus 2 transistors défectueux »

$P(X \leqslant 2) \approx 0,544$

c) « le lot contient au moins 3 transistors défectueux »

$P(X \geqslant 3) = 1 - P(X \leqslant 2) \approx 0,457$

3) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

$E(X) = 500 \times 5 \times 10^{-3} = 2,5$
En moyenne il y a 2,5 transistors qui sont défectueux.

Ex 3 :

Soit la fonction f définie par $f(x)=\arctan(x^3)$

a) Déterminer l'ensemble de définition de f

$D_f=\mathbb{R}$

b) Étudier les variations de la fonctions f .

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=3\dfrac{x^2}{x^6+1}\geqslant 0$

On en déduit que f est croissante sur $\mathbb{R}$

c) Dresser le tableau de variation de f en indiquant les limites.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$-\dfrac{\pi}{2}$ ↗	$\dfrac{\pi}{2}$

Ex 4 :

Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1}{3+\cos x}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f .

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\cos(x)\geqslant -1$ donc $3+\cos(x)\neq 0$ et $D_f=\mathbb{R}$

2) Montrer que la fonction f est paire.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(-x)=\dfrac{1}{3+\cos(-x)}=\dfrac{1}{3+\cos(x)}=f(x)$
Donc f est paire

3) Montrer que f est périodique et déterminer sa période.

$f(x+2\pi)=\dfrac{1}{3+\cos(x+2\pi)}=\dfrac{1}{3+\cos(x)}=f(x)$

Donc f est périodique de période 2π

4) Calculer la fonction dérivée f' et déterminer son signe sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on $f'(x)=\dfrac{\sin(x)}{(3+\cos(x))^2}$
Sur $[0;\pi]$, $f'(x)\geqslant 0$

5) Dresser le tableau de variation de f sur $[-\pi\,;\pi]$ et tracer l'allure de la fonction sur $[-2\pi;2\pi]$

x	$-\pi$	0	$+\pi$
$f'(x)$	$-$		$+$
f	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

