1ère **Devoir surveillé n ° 2**

- Durée 1h30
- Calculatrices de lycée autorisées



Barème :	**Nom :**
1) 5 pts **2)** 5 pts **3)** 6 pts **4)** 4 pts	

Ex 1 : Vrai ou faux (pour chaque question : 0,5 si juste / -0,5 si faux / 0 si pas de réponse)

1)	Si A et B sont incompatibles, alors ils sont indépendants.	
2)	Si A et B sont indépendants, alors ils sont incompatibles.	
3)	Si $P(A)=1$, alors A et B sont indépendants.	
4)	Si A et B sont incompatibles, alors $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$	
5)	Si A et B sont indépendants, alors $P(A\cup B)=P(A)P(B)$	
6)	Si $A \subset B$, alors A et B sont indépendants	
7)	Si $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B le sont aussi.	
8)	Si $P(A)=0,3$ et $P(B)=0,6$ et $P(A\cap B)=0,18$, alors A et B sont indépendants.	
9)	Si $P(A)=0,97$ et $P(A\cap B)=0,89$, alors $P(A\cup B)=1,27$	
10)	Si A et B sont indépendants, $P(A)=0,3$ et $P(B)=0,2$, alors $P(\overline{A}\cap\overline{B})=0,94$	

Ex 2

Dans un lot de 100 pièces astérix de monnaie toutes de même apparence ont été mélangées 70 pièces équilibrées et 30 pièces truquées.

La probabilité d'apparition de « FACE » lors d'un jet d'une pièce truquée est de $\frac{3}{5}$. On prend une pièce au hasard dans ce lot et on la lance .

On note T : « la pièce est truquée » et F : « on obtient FACE »

1) Calculer la probabilité d'avoir pris une pièce équilibrée.



2) Faire un arbre illustrant la situation.

3) a) Calculer la probabilité d'obtenir une pièce truquée et de tomber sur PILE.

b) Calculer la probabilité de tomber sur FACE.

4) La pièce est tombée sur FACE . Quelle est la probabilité qu'elle soit équilibrée ?

Ex 3 :

Une entreprise industrielle fabrique des composants électroniques en grande quantité. Les composants subissent deux tests successifs de contrôle de qualité automatisés :

- Un premier test d'étanchéité, noté test **A**
- Un second test de résistance électrique, noté test **B**

Les études statistiques préliminaires ont permis d'établir les probabilités suivantes sur un composant prélevé au hasard dans la production :

- La probabilité qu'un composant réussisse le test **A** est égale à x, où x est un réel appartenant à l'intervalle]0 ; 1[. On note $P(A)=x$.
- Si le composant réussit le test **A**, la probabilité qu'il réussisse le test **B** est égale à $2x-0,1$.
- Si le composant ne réussit pas le test **A**, la probabilité qu'il réussisse le test **B** est égale à $0,3$.

1) Justifier que le réel x doit appartenir à l'intervalle [0,05 ; 0,55] pour que les données du problème soient cohérentes.

2) Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré de probabilité faisant apparaître les événements A, $\bar{A}$, B et $\bar{B}$.

3) Démontrer que la probabilité qu'un composant réussisse le test B est donnée par la fonction $f(x)$ définie par $f(x)=2x^2-0,4x+0,3$

4) On souhaite déterminer s'il existe une valeur du paramètre x pour laquelle la réussite au test A et la réussite au test B sont des événements indépendants.

a) Montrer que les événements A et B sont indépendants si et seulement si le réel x est solution d'une équation du second degré à déterminer.

b) Résoudre cette équation**.**

c) Déduire s'il existe une valeur de x rendant les deux tests indépendants en tenant compte du domaine de validité déterminé à la question 1.

5) Optimisation : Déterminer la valeur de x qui minimise la probabilité $P(B)$ de réussir le test B, et calculer cette probabilité minimale.

Ex 4 :

1) Une urne contient 12 boules vertes et 8 boules rouges
Compléter le programme suivant écrit en python simulant cinq tirages successifs avec remise d'une boule de cette urne.

2) Lors d'une simulation, on obtient ['verte', 'verte', 'rouge', 'verte', 'verte']
Que vaut tirage[2] ?

```
1  from random import randint
2  tirage=[]
3  for i in range( .....):
4      if randint(.....,.....)<=.....
5          tirage.append("..........................")
6      else:
7          tirage.append("verte")
8  print(tirage)
```

3) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule verte ?

Correction :

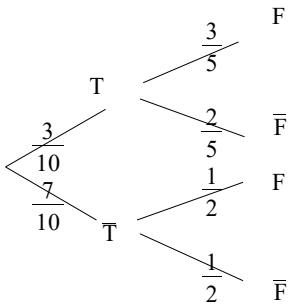
Ex 1 : Vrai ou faux (pour chaque question : 0,5 si juste / -0,5 si faux / 0 si pas de réponse)

1)	Si A et B sont incompatibles, alors ils sont indépendants.	F
2)	Si A et B sont indépendants, alors ils sont incompatibles.	F
3)	Si $P(A)=1$, alors A et B sont indépendants.	V
4)	Si A et B sont incompatibles, alors $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$	V
5)	Si A et B sont indépendants, alors $P(A\cup B)=P(A)P(B)$	F
6)	Si $A \subset B$, alors A et B sont indépendants	F
7)	Si $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B le sont aussi.	V
8)	Si $P(A)=0,3$ et $P(B)=0,6$ et $P(A\cap B)=0,18$, alors A et B sont indépendants.	V
9)	Si $P(A)=0,97$ et $P(A\cap B)=0,89$, alors $P(A\cup B)=1,27$	F
10)	Si A et B sont indépendants, $P(A)=0,3$ et $P(B)=0,2$, alors $P(\overline{A}\cap\overline{B})=0,94$	F

Ex 2 :

1) Les 100 issues sont équiprobables. On a donc : $P(\overline{T})=\frac{70}{100}=\frac{7}{10}$

2)



3) a) $P(T\cap\overline{F})=P(T)P_T(\overline{F})=\frac{3}{10}\times\frac{2}{5}=\frac{3}{25}$

b) T et $\overline{T}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales, on a :

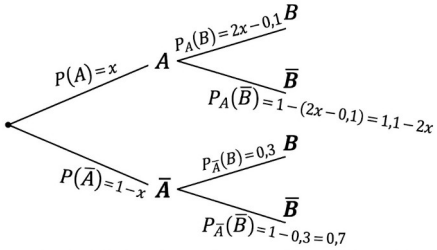
$P(F)=P(T\cap F)+P(\overline{T}\cap F)=P(T)P_T(F)+P(\overline{T})P_{\overline{T}}(F)=\frac{3}{10}\times\frac{3}{5}+\frac{7}{10}\times\frac{1}{2}=\frac{53}{100}$

4) $P_F(\overline{T})=\frac{P(\overline{T}\cap F)}{P(F)}=\frac{\frac{7}{10}\times\frac{1}{2}}{\frac{53}{100}}=\frac{35}{53}$

Ex 3 :

1) On doit avoir : $0\leqslant P_A(B)\leqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad 0\leqslant 2x-0,1\leqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad 0,1\leqslant 2x\leqslant 1,1 \quad\Leftrightarrow\quad 0,05\leqslant x\leqslant 0,55$

2)



3) A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers . D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(B)=P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B)=P(A)\times P_A(B)+P(\bar{A})\times P_{\bar{A}}(B)$$

En substituant les expressions en fonction de x :

$$P(B)=x(2x-0,1)+(1-x)\times 0,3=2x^2-0,1x+0,3-0,3x=2x^2-0,4x+0,3=f(x)$$

4) a) Les événements A et B sont indépendants si et seulement si P(A ∩ B) = P(A) × P(B), c'est à dire :

$$\begin{aligned} & x(2x-0,1)=x(2x^2-0,4x+0,3) \\ \Leftrightarrow \quad & 2x-0,1=2x^2-0,4x+0,3 \quad \text{car x} \neq 0 \text{ (car x} \in [0,05 ; 0,55]) \\ \Leftrightarrow \quad & 2x^2-2,4x+0,4=0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2-1,2x+0,2=0 \end{aligned}$$

b) $\Delta = b^2 - 4ac = (-1,2)^2 - 4 \times 1 \times 0,2 = 1,44 - 0,8 = 0,64$
Comme **$\Delta > 0$**, l'équation admet deux solutions.

$$x_1=\frac{1,2+\sqrt{0,64}}{2}=1 \text{ et } \quad x_2=\frac{1,2-\sqrt{0,64}}{2}=0,2$$

c) $x_1 \notin]0,05;0,55[$ et $x_2 \in]0,05;0,55[$
Donc x_2 rend les deux tests indépendants

5) La probabilité P(B) est modélisée par $f(x)=2x^2-0,4x+0,3$.
Comme le coefficient en x^2 est $a=2 > 0$, la parabole est orientée vers le haut et admet un minimum au sommet d'abscisse :

$$\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{-0,4}{2\times 2}=\frac{0,4}{4}=0,1$$

La valeur 0,1 appartient bien à l'intervalle [0,05 ; 0,55].
La probabilité minimale vaut :

$$f\ (0,1) = 2(0,1)^2 - 0,4(0,1) + 0,3 = 0,02 - 0,04 + 0,3 = 0,28$$

Ainsi, la probabilité minimale de réussite au test B est de 0,28.

Ex 4 :

1)

```
1  from random import randint
2  tirage=[]
3  for i in range(5):
4      if randint(1,20)<=8:
5          tirage.append("rouge")
6      else:
7          tirage.append("verte")
8  print(tirage)
```

2) tirage[2] contient la valeur "rouge"

3) Il faut passer par l'événement contraire qui est « tirer 5 boules rougess »

Le tirage est avec remise, on peut donc considérer qu'il s'agit de la répétition de cinq épreuves indépendantes.

La probabilité tirer 5 boules rouges est donc : $\frac{8}{20}\times\frac{8}{20}\times\frac{8}{20}\times\frac{8}{20}\times\frac{8}{20}=\frac{32}{3125}$

Ainsi la probabilité de tirer au moins une boule verte est : $1-\frac{32}{3125}=\frac{3093}{3125}$