LOGARITHME NÉPÉRIEN

1) DÉFINITION

Rappel :

Pour tout $b \in]0\,;+\infty[$, il existe **un unique** réel a tel que $e^a = b$.
On note $a = \ln b$, ce qui se lit logarithme népérien de b . Ainsi à tout réel x strictement positif, on peut associer un unique réel noté $\ln(x)$.

Définition :

On appelle **fonction logarithme népérien** la fonction qui à un réel x strictement positif, fait correspondre $\ln(x)$.

$$\begin{array}{rcl} \ln :]0\,;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array}$$

On écrit souvent $\ln x$ au lieu de $\ln(x)$

Propriétés :

- Pour tout réel x strictement positif, on a $e^{\ln x} = x$
- Pour tout réel x , on a $\ln(e^x) = x$
- $\ln 1 = 0$
- $\ln e = 1$

2) PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

Propriétés :

Pour tous réels a et b strictement positifs on a :

- $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$
  On peut généraliser cette propriété à plusieurs nombres.
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\ln(a^n) = n \ln a$

3) ÉTUDE DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Propriété :

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

La croissance de la fonction ln est lente.
Par exemple : $\ln(10^8) \approx 18{,}42$

Conséquences :

Pour tous réels a et b strictement positifs on a :

- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
- $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$
- $\ln a \leqslant \ln b \Leftrightarrow a \leqslant b$
- $a > 1 \Leftrightarrow \ln a > 0$
- si $0 < a < 1$ alors $\ln a < 0$

Propriété :

La fonction $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

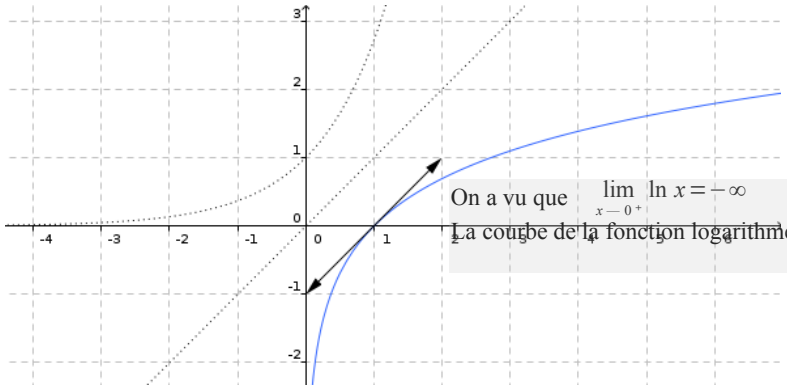
Propriété :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

Tableau de variations :

x	0 $\quad\quad$ $+\infty$
$\ln$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

Représentation graphique :



Dans un repère orthonormal, les courbes des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

On a vu que $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

La courbe de la fonction logarithme népérien a pour asymptote verticale l'axe (Oy).

Quelques limites fameuses : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$

4) DÉRIVÉE DE $x \longmapsto \ln(u(x))$

Propriété :

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

La fonction $x \longmapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$, on a : $(\ln(u(x)))' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$