LIMITES DE FONCTIONS

1) LIMITE EN $+\infty$ ET EN $-\infty$

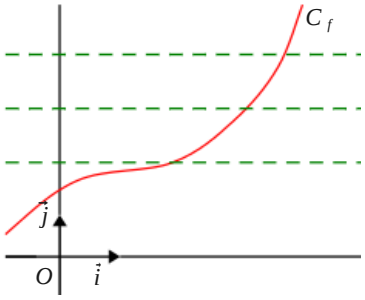
A) LIMITE INFINIE EN $+\infty$ ET EN $-\infty$

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a\,;+\infty[$ où a est un réel.
Intuitivement, dire que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, signifie que lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$, ***« les nombres $f(x)$ correspondants finissent par être aussi grands que l'on veut ».***

On note :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$



Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grande, la courbe C_f finit par se situer au dessus de n'importe quelle droite horizontale .

Remarques :

- De manière plus mathématique (moins intuitive …) :
  Tout intervalle de la forme $]M\,;+\infty[$ finit par contenir toutes les valeurs $f(x)$. On écrit aussi :

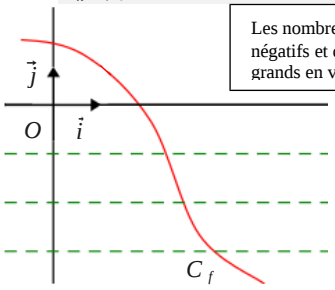
  Pour tout réel $M>0$, il existe un réel m tel que , si $x>m$, alors $f(x)\in]M\,;+\infty[$

- On dit aussi que la fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Exemples à connaître : $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$

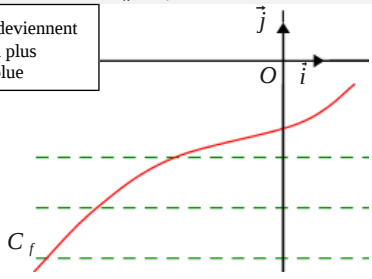
On définit de la même façon …

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

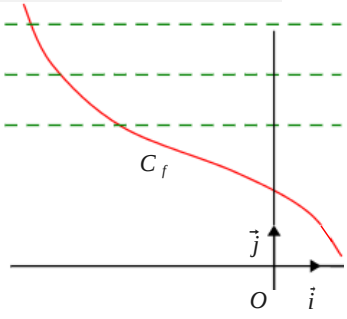


Les nombres $f(x)$ deviennent négatifs et de plus en plus grands en valeur absolue

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$



Dans ces deux cas, f est définie sur un intervalle de la forme $]-\infty\,;b]$

Remarque :

Dans la pratique, on peut utiliser la remarque suivante : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(-x)$

B) LIMITE FINIE EN $+\infty$ ET EN $-\infty$ ET ASYMPTOTE HORIZONTALE

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a\,;+\infty[$ où a est un réel et soit L un réel donné .

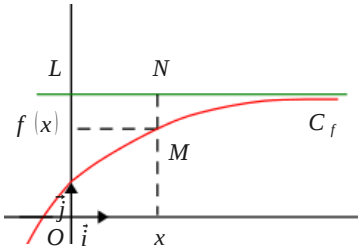
- Intuitivement, dire que f a pour limite L en $+\infty$, signifie que lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$, **« les nombres $f(x)$ correspondants viennent s'accumuler autour de L ».**

On note :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$$

- On dit que la droite d'équation $y=L$ est **asymptote horizontale** à la courbe C_f en $+\infty$.

Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, la distance MN tend vers 0 . La courbe C_f se rapproche sans cesse de la droite d'équation $y=L$.



Remarque :

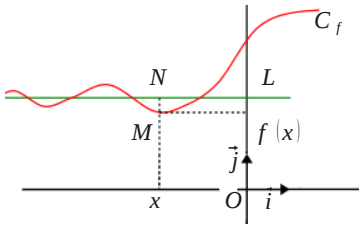
De manière plus mathématique (moins intuitive …) :
Tout intervalle ouvert contenant L finit par contenir toutes toutes les valeurs $f(x)$. On écrit aussi :

Pour tout $\varepsilon>0$ (aussi petit qu'il soit) il existe un réel m tel que , si $x>m$, alors $f(x)\in]L-\varepsilon\,;L+\varepsilon[$.

On définit de la même façon :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$

f est définie sur un intervalle de la forme $]-\infty\,;b]$



La distance MN tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$.

La droite d'équation $y=L$ est **asymptote horizontale** à la courbe C_f en $-\infty$.

Exemples à connaître :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^3}=0$

La courbe représentant la fonction $x\longmapsto\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ admet l'axe des abscisses comme asymptote en $+\infty$; les trois autres courbes admettent cet axe comme asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$.

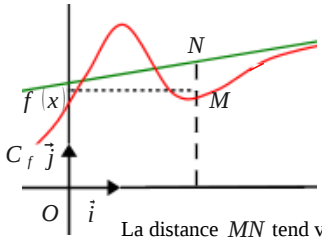
Remarque :
Une fonction n'a pas forcément une limite finie ou infinie quand x tend vers $+\infty$. (Par exemple $x\longmapsto\sin x$, $x\longmapsto\cos x$ …)

C) ASYMPTOTE OBLIQUE

Définition :

Soit a ($a\neq0$) et b deux réels et C la courbe représentant une fonction f dans un repère.
Dire que la droite d'équation $y=ax+b$ est asymptote oblique à C en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) revient à dire que :

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$ (respectivement $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(ax+b))=0$)



La distance MN tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Remarque :
Une fonction peut avoir une limite infinie lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ sans que sa courbe possède une asymptote. (c'est le cas de la fonction carrée)

2) LIMITE EN a (avec a réel)

Lorsque que l'on définit la limite d'une fonction f en un réel a , on considère que :

- $a\in D_f$
- ou a est une borne de D_f

A) LIMITE INFINIE EN a ET ASYMPTOTE VERTICALE

Définition :

Soit f une fonction.

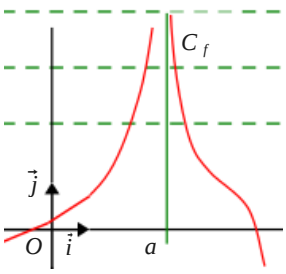
- Intuitivement, dire que f a pour limite $+\infty$ en a , signifie que lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a, ***« les nombres $f(x)$ correspondants finissent par être aussi grands que l'on veut ».***

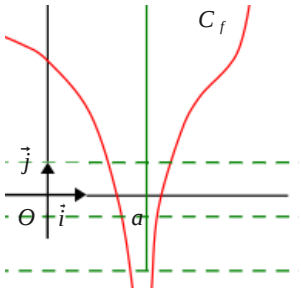
On note :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$

On définit de la même façon $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$

- On dit que la droite d'équation $x=a$ est **asymptote verticale** à la courbe C_f.

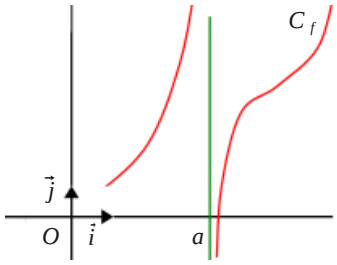




Lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a , la courbe Cf finit par se situer au dessus (et en dessous pour la deuxième figure) de n'importe quelle droite horizontale .

Remarque :
Il arrive souvent qu'on soit amené à définir des limites *«d'un seul côté de a»*.
Naturellement, on introduit les notions de **limite à droite en a** et de **limite à gauche en a** et on note :

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ ou encore $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)$



Dans ce cas

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$

Exemples :

- $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^3}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x^3}=-\infty$

Les courbes représentant ces fonctions admettent l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.

B) LIMITE FINIE EN a

Définition :

Soit f une fonction telle que a soit dans son ensemble de définition Df ou soit une borne de Df et soit L un réel donné.
Intuitivement, dire que f a pour limite L en a, signifie que lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a **« les nombres $f(x)$ correspondants viennent s'accumuler autour de L »**.

On note : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

Remarques :

- De manière plus mathématique (moins intuitive …) :
  Tout intervalle ouvert contenant L finit par contenir toutes les valeurs $f(x)$. On écrit aussi :

  Pour tout $(\varepsilon > 0)$ (aussi petit qu'il soit) les nombres $f(x)$ finissent par se situer dans l'intervalle $]L-\varepsilon\,;\,L+\varepsilon[$.

- On admet que si une fonction f est définie en a et si f admet une limite finie en a, alors :
  $$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$
  C'est le cas, en tout point de l'ensemble de définition, des fonctions polynômes, rationnelles et trigonométriques, de la fonction racine carrée …et des composées de ces fonctions.

  Cette remarque nous permet de déterminer rapidement la limite d'une telle fonction en tout point de son ensemble de définition.

  Exemples : $\lim\limits_{x \to 3} \sin(3x+4) = \sin 13$, $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x^2+3} = \sqrt{19}$

Attention : Comme nous le verrons en exercice, toutes les fonctions n'admettent pas forcément une limite finie en tout point de leur ensemble de définition. (*la limite à droite et la limite à gauche peuvent être différentes…*)

3) OPÉRATION SUR LES LIMITES

Par convention et pour simplifier :

- on note $\lim f$ et $\lim g$ les limites de f et de g , toutes les deux en a , en $+\infty$ ou en $-\infty$
- on note par un point d'interrogation (?) les cas où il n'y a pas de conclusion générale.
  On dit qu'il s'agit de cas de formes indéterminées . Ces cas nécessiteront une étude particulière chaque fois qu'ils se présenteront.

- **Limite de $k\,f$ (où k est un réel donné)**

$\lim f$	L	$+\infty$	$-\infty$
$\lim kf$ (avec $k>0$)	kL	$+\infty$	$-\infty$
$\lim kf$ (avec $k<0$)	kL	$-\infty$	$+\infty$

Exemple : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g : x \longmapsto -\dfrac{2}{x^2}$.

On a $g = -2\,f$ avec $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$
Comme $-2 < 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$

- ***Limite de*** $f+g$

$\lim f$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim (f+g)$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Exemple : Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h : x \longmapsto \sqrt{x} - \dfrac{2}{x^2}$

On a $h = f+g$ avec $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ et $g : x \longmapsto -\dfrac{2}{x^2}$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

- **Limite de $f \times g$**

$\lim f$	L	$L>0$	$L>0$	$L<0$	$L<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim g$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim (f \times g)$	$L \times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Exemple : Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ par $h : x \longmapsto (x+2)\sqrt{x}$

On a $h = f \times g$ avec $f : x \longmapsto x+2$ et $g : x \longmapsto \sqrt{x}$

Comme $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0$

- **Limite de $\frac{f}{g}$**

$\lim f$	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$L>0$ ou $+\infty$	$L>0$ ou $+\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	0
$\lim g$	L'	$+\infty$ ou $-\infty$	$L'>0$	$L'<0$	$L'>0$	$L'<0$	$+\infty$ ou - ∞	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Cas où la limite de g n'est pas nulle *Cas où la limite de g est nulle*

Remarques :

- « 0 en restant négative ou positive » signifie que g garde un signe constant au voisinage de a , en $+\infty$ ou en $-\infty$ suivant les cas.
- On note $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0^+$ pour indiquer que $g(x)$ tend vers 0 en restant positive.
- On note $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0^-$ pour indiquer que $g(x)$ tend vers 0 en restant négative.

Exemple : Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h : x \longmapsto \frac{2x-4}{\sqrt{x}}$

On a $h = \frac{f}{g}$ ou $f : x \longmapsto 2x-4$ et $g : x \longmapsto \sqrt{x}$

Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -4$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 0^+$, on en déduit que $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = -\infty$

4) LIMITE D'UNE FONCTION COMPOSÉE

Propriété :

Soit f, g et h trois fonctions telles que $f(x) = g(h(x))$.
Chacune des lettres a, b et c désigne soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.
Si $\lim\limits_{x \to a} h(x) = b$ et si $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$

Dans la pratique, on cherche d'abord la limite b de h en a, puis la limite de g en b.

Exemple : Soit $f(x) = \sqrt{2x^2-3x+5}$. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Posons $X = 2x^2-3x+5$. On a alors $f(x) = \sqrt{X}$
$\lim\limits_{x \to +\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exemple : Soit $f(x) = \left(\frac{1}{2x}\right)^5$. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

Posons $X = \frac{1}{2x}$. On a alors $f(x) = X^5$
$\lim\limits_{x \to 0^+} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} X^5 = +\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

Exemple : Soit $f(x) = \ln\left(\frac{1}{2x}+3\right)$. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Posons $X = \frac{1}{2x}+3$. On a alors $f(x) = \ln(X)$
$\lim\limits_{x \to +\infty} X = 3$ et $\lim\limits_{X \to 3} \ln(X) = \ln(3)$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ln(3)$

Exemple : Soit $f(x) = e^{\frac{2x^2+3}{2x^2-10}}$. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

Posons $X = \frac{2x^2+3}{2x^2-10}$. On a alors $f(x) = e^X$
$\lim\limits_{x \to -\infty} X = 1$ et $\lim\limits_{X \to 1} e^X = e$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = e$