FONCTION EXPONENTIELLE

1) DÉFINITION

Propriété et définition :

Il existe une unique fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que :

$$f' = f \text{ et } f(0) = 1$$

Cette fonction, notée $\exp$, est appelée **fonction exponentielle**.

2) PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES – NOTATION e^x

Propriété :

Pour tous réels x et y, on a :

$$\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

La fonction exponentielle est donc une fonction transformant une somme en un produit.

Remarque :

La fonction exponentielle est la seule fonction vérifiant :
- f est dérivable sur $\mathbb{R}$
- $f(0) = f'(0) = 1$
- pour tous réels x et y, $f(x+y) = f(x) \times f(y)$

Notation :

On conviendra de noter pour tout réel x : $\exp(x) = e^x$ où $e = \exp(1)$

La fonction exponentielle est alors définie par :

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^x \end{aligned}$$

Remarque :

Le nombre $e = \exp(1)$ a pour valeur approchée 2,718.

La notation e^2 a donc une double signification : soit le nombre e élevé au carré, soit le nombre $\exp(2)$. (*Ces deux nombres étant égaux*)

Par contre la notation e^π ne peut désigner que le nombre $\exp(\pi)$.

Propriétés

Pour tous réels a et b, on a :

- $e^{a+b} = e^a e^b$
  On peut généraliser cette propriété à plusieurs nombres.
- $e^b \neq 0$ et $e^{-b} = \dfrac{1}{e^b}$
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- Si n est un entier relatif : $e^{na} = (e^a)^n$

3) ÉTUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

Propriété :

La fonction exponentielle est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(e^x)' = e^x$

On sait que toute fonction dérivable est continue, donc la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.

Propriétés :

- $e^0 = 1$; $e^1 = e$
- Pour tout réel x, $e^x > 0$

Propriété :

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La fonction exponentielle croît très vite (par exemple : $e^{50} \approx 5 \times 10^{21}$)

Conséquences :

Pour tous réels a et b
- $a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$
- $a < b \Leftrightarrow e^a < e^b$
- $a \leqslant b \Leftrightarrow e^a \leqslant e^b$
- $a > 0 \Leftrightarrow e^a > 1$
- $a < 0 \Leftrightarrow 0 < e^a < 1$

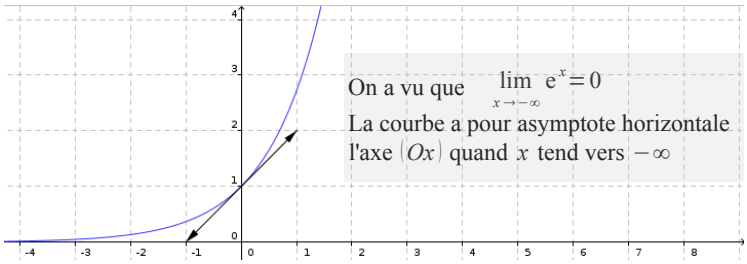
Propriétés :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Tableau de variations :

x	$-\infty$		$+\infty$
exp	0	↗	$+\infty$

Représentation graphique :



On a vu que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

La courbe a pour asymptote horizontale l'axe (Ox) quand x tend vers $-\infty$

Quelques limites fameuses : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x\, e^x = 0$

4) DÉRIVÉE DE $x \longmapsto e^{u(x)}$

Propriété :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
La fonction $x \longmapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$, on a :

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)\, e^{u(x)}$$