Exercice 1 :

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes, sans déterminer l'ensemble de dérivabilité.
Vérifier les calculs avec la calculatrice ou avec Xcas.

a) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+5x-4$

b) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(-3x+5)^4$

c) f définie sur $]-\infty;3[$ par $f(x)=\frac{5x-8}{-x+3}$

d) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{(x+1)^2}{x^2+x+1}$

e) f définie sur $\left]-\infty;\frac{2}{3}\right[$ par $f(x)=\sqrt{-3x+2}$

f) f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x\ln x$

g) f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

h) f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=(\ln(x))^2$

i) f définie sur $\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$ par $f(x)=\ln(2x+3)$

j) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=5x^2-e^{-x}$

k) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=7e^{0,07x}$

l) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2x-5)e^{x^2}$

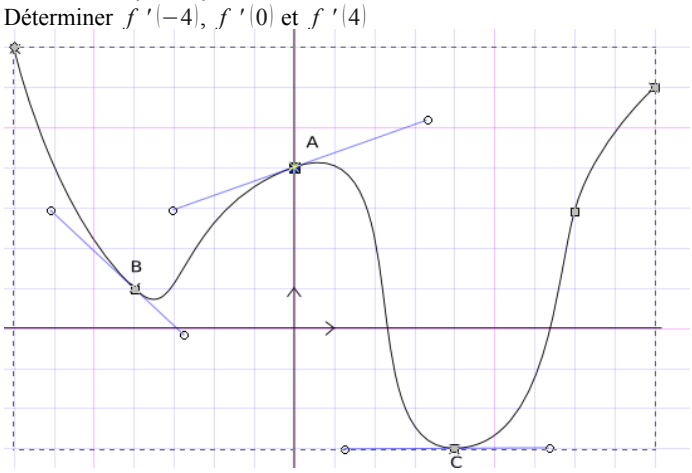
m) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{x}{e^x}$

n) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(\cos(x))^3-5x$

o) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3\cos(x)-e^{\sin(x)}$

Exercice 2 :

Ci-dessous une courbe réalisée avec le logiciel de dessin vectoriel Inkscape . On suppose que cette courbe représente une fonction f dérivable sur $[-7;9]$
Déterminer $f'(-4)$, $f'(0)$ et $f'(4)$

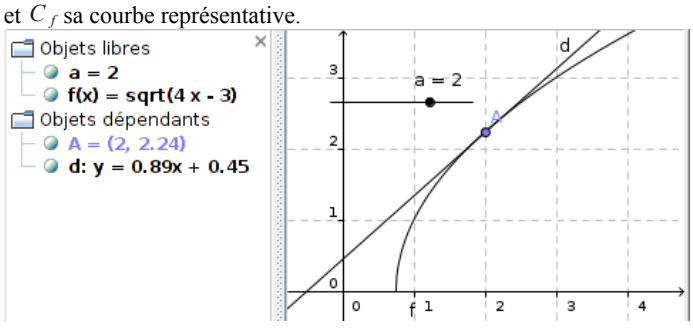


Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$-{-1} par $f(x)=\frac{2x}{x+1}$ et C_f sa courbe représentative.
a) Démontrer qu'il existe exactement deux tangentes à C_f qui sont parallèles à la droite d'équation $4x-2y+3=0$.
b) Déterminer une équation de chacune de ces tangentes.

Exercice 4 :

On considère la fonction f définie sur $\left]\frac{3}{4};+\infty\right[$ par $f(x)=\sqrt{4x-3}$ et C_f sa courbe représentative.



Le but de l'exercice est de démontrer que C_f admet une unique tangente passant par le point $O(0;0)$ et de déterminer le point A de C_f où la tangente à C_f passe par O.
a)Déterminer, à l'aide d'un logiciel adapté, l'abscisse du point A qui semble répondre au problème.
b) Démontrer qu'un point A de C_f d'abscisse A répond au problème posé si et seulement si $f(a)=af'(a)$
c) Répondre au problème posé.

Exercice 5 :

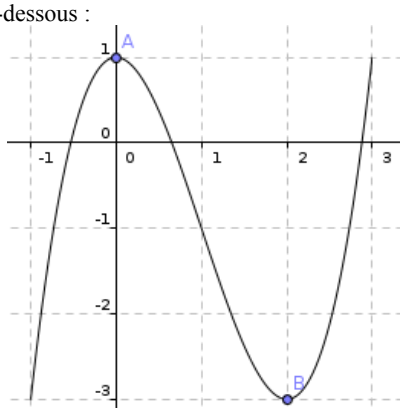
Étudier les variations des fonctions suivantes.
a) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^3-2x^2+2x-1$
b) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(-3x+5)^3$
c) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{e^x}{e^x+4}$
d) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(3-x)e^x+1$
e) f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x-3-2x\ln x$

Exercice 6 :

Utiliser la dérivation pour montrer les inégalités suivantes :
a) pour tout $t\in]-1;+\infty[$, on a $\ln(1+t)\leqslant t$
b) pour tout $x\in]0;+\infty[$, on a $\sqrt{x}\leqslant\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

Exercice 7 :

Le plan est muni d'un repère othonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Soit f la fonction définie sur $I=[-1;3]$ dont la courbe C_f est représentée ci-dessous :



Aux point A et B la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
a) Donner le tableau de variations de f.

b) Déduire de la représentation graphique de f qu'il existe trois réels de l'intervalle I tels que $f(x)=0$.
Déterminer graphiquement une valeur approchée de ces trois nombres.

c) A l'aide du graphique, résoudre dans I l'inéquation $f(x)\leqslant -1$

d) On admet que f est définie sur I par $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ où a, b, c et d sont quatre constantes réelles.
Utiliser les données de la figure pour déterminer a, b, c et d.

e) ***Balayage***

A l'aide d'une calculatrice et de l'expression de $f(x)$, remplir le tableau ci-dessous : (à 10^{-2} près)

x	2,80	2,81	2,82	2,83	2,84	2,85	2,86	2,87	2,88	2,89	2,90
$f(x)$											

En déduire un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la plus grande des solutions positives de l'équation $f(x)=0$.

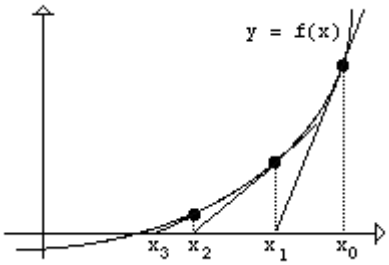
Exercice 8 : ***Algorithme de dichotomie***

On considère la fonction de l'exercice précédent et l'algorithme ci-dessous :

Initialisations :
a prend la valeur 2
b prend la valeur 3
Traitement :
Tant que $b-a>0{,}01$
m prend la $\frac{a+b}{2}$
Si $f(m)>0$ alors b prend la valeur m
sinon a prend la valeur m
FinSi
FinTantque
Sorties :
Afficher a , b

a) Expliquer le rôle de cet algorithme .
b) La condition $b-a>0{,}01$ qui gère la boucle peut-elle être modifiée ? Expliquer.
c) Traduire cet algorithme dans un langage de programmation (algobox, Xcas, calculatrice …)
d) Saisir le programme obtenu à la calculatrice ou à l'ordinateur.
e) Vérifier le fonctionnement du programme.

Exercice 9 : ***Méthode de Newton***



Ce graphique explique la méthode de Newton.
a) Expliquer le fonctionnement de l'algorithme .
b) Sur Xcas, il existe l'instruction : « newton(f(x),x,a,p) »
Cette instruction calcule une racine de $f(x)$ par la méthode de Newton en partant de a avec p itérations (par défaut $p=20$).
Utiliser Xcas pour déterminer à 10^{-4} près les trois solutions de l'exercice 7.

Exercice 10 :

On donne le tableau de variation d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘ -2	↗ 3	↘ -1	↗ 1

a) Déterminer les extrema de f
b) Déterminer le signe de f.
c) Discuter suivant les valeurs du réel k, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=k$.

Exercice 11 :

Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{5}{2};2\right]$ par $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+2x^2-3$

1) Étudier les variations de f (faire un tableau de variation)

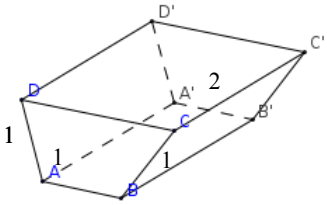
2) Déterminer le maximum et le minimum de f sur $\left[-\frac{5}{2};2\right]$

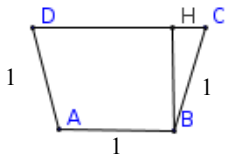
En déduire le meilleur encadrement possible de $f(x)$ sur $\left[-\frac{5}{2};2\right]$

3) Déterminer le meilleur encadrement possible de $|f(x)|$ sur $\left[-\frac{5}{2};2\right]$

Exercice 12 : ***Optimisation***

Une benne à la forme d'un prisme droit dont la base est un trapèze isocèle $ABCD$.





La longueur du côté CD est variable.
Les autres dimensions sont fixes.
On désigne par x la longueur CH où H est le projeté orthogonal de B sur (CD).
On se propose de déterminer x de façon que la benne ait un volume maximal.

a) Calculer en fonction de x l'aire $S(x)$ du trapèze isocèle $ABCD$, puis le volume $V(x)$ de la benne.

On considère la fonction f définie sur $[0\,;1[$ par $f(x)=(x+1)\sqrt{1-x^2}$

b) Démontrer que $f'(x)$ peut s'écrire sous la forme $f'(x)=\frac{1-x-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

c) Étudier le sens de variation de f. (sans les limites)

d) Exprimer $V(x)$ à l'aide de $f(x)$.

e) Pour quelle valeur de x le volume de la benne est-il maximal ?

f) Quel est alors le volume de la benne et quelle est la mesure en degrés de l'angle $\widehat{CBH}$