APPROXIMATION LOCALE D'UNE FONCTION

Dans ce chapitre, nous allons montrer comment approcher des fonctions par des polynômes au voisinage d'un point.
Ce qui nous permettra de les étudier localement, de déterminer facilement l'équation et la position d'une tangente à la courbe, ou de calculer certaines limites.

1) NOTION DE DÉVELOPPEMENT LIMITÉ : première approche avec la fonction exponentielle

Soit $x \in [0\,;\,1]$. En utilisant une intégration par parties, calculer $\int_0^x \frac{(x-t)^3}{3\,!} e^t \,dt$

Posons $u(t) = \frac{(x-t)^3}{3\,!}$ $\quad v'(t) = e^t$

$u'(t) = -\frac{(x-t)^2}{2}$ $\quad v(t) = e^t$

Les fonctions u et v sont dérivables et leurs dérivées sont dérivables sur $[0\,;\,x]$. On a alors :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^3}{3\,!} e^t \,dt = \left[\frac{(x-t)^3}{3\,!} \times e^t\right]_0^x - \int_0^x \left(-\frac{(x-t)^2}{2}\right) \times e^t \,dt = -\frac{x^3}{3!} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \times e^t \,dt$$

Définition :

$2! = 2 \times 1$

$3! = 3 \times 2 \times 1$

$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$

$n!$ se lit « factorielle n»

On pourrait encore faire une intégration par parties avec $\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} e^t \,dt$, puis une autre …

Regardons ce qu'on obtient avec Xcas.
On saisit l'instruction : « int((x-t)^2/2*exp(t),t,0,x) »
On obtient : « -1/2*x^2-x-1+exp(x) »

Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, on obtient donc :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^3}{3\,!} e^t \,dt = -\frac{x^3}{3\,!} - \frac{x^2}{2} - x - 1 + e^x \quad \Leftrightarrow \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3\,!} e^t \,dt$$

Puisque e^t est bornée sur $[0\,;\,1]$ par e, on peut majorer $\int_0^x \frac{(x-t)^3}{3\,!} e^t \,dt$ par $e \times \frac{x^4}{4\,!}$

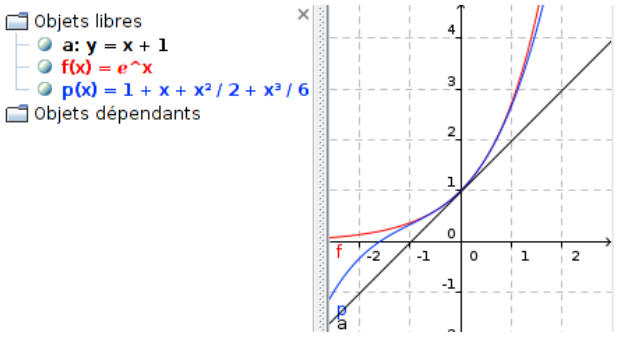
En procédant de même pour $x \in [-1\,;\,0]$, on montre que pour tout $x \in [-1\,;\,1]$, il existe une fonction ε telle que :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3 \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

On dit que cette écriture est l**e développement limité à l'ordre 3** de la fonction exponentielle en 0.

Le polynôme $P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6}$ est ainsi une approximation de la fonction exponentielle au voisinage de 0.

Graphiquement :



- On constate effectivement que les deux courbes ont la même allure au voisinage du point $(0\,;\,1)$
- On peut en déduire que la droite d'équation $y = 1 + x$ est tangente à la courbe de la fonction exponentielle au voisinage de 0.
- Par ailleurs, la différence $d(x) = e^x - (1 + x)$ peut être approchée au voisinage de 0 par $\frac{x^2}{2}$ qui est positif.

On en déduit que la courbe est au-dessus de cette tangente au voisinage de 0.

On peut généraliser ce résultat :

Propriété :

Pour tout $x \in [-1\,;\,1]$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2\,!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

2) DÉFINITION

Définition :

Soit f une fonction définie en 0 et au voisinage de 0.

- On dit que f admet **un développement limité d'ordre *n* en 0** s'il existe des nombres réels a_0, a_1, …, a_n et une fonction ε, tels que, au voisinage de $x=0$, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x)=a_0+a_1 x+\ldots+a_n x^n+x^n \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x)=0$$

- Le polynôme $P(x)=a_0+a_1 x+\ldots+a_n x^n$ est appelé **partie régulière** du développement limité d'ordre n en 0.

Remarques :

- $a_0=f(0)$
- On peut montrer que le développement limité d'une fonction f en 0 à l'ordre n est unique.

3) QUELQUES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS DE FONCTIONS USUELLES

Propriétés :

- $\mathrm{e}^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$
- $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+\ldots+(-1)^n x^n+x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$
- $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$
- $\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}+x^{2p+1}\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$
- $\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^p\frac{x^{2p}}{2p!}+x^{2p}\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$
- $(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+x^n\varepsilon(x)$

La fonction ε figurant dans ces résultats est est différente pour chacune de ces fonctions.

Remarque : On retrouve la parité des fonctions sinus et cosinus.

4) UTILISATION DE Xcas

Pour les développements limités, deux fonctions sont disponibles : « series » et « taylor ».
La différence est que l'ordre du développement doit être spécifié pour series, il est égal à 6 par défaut pour taylor.

Instructions Xcas	Résultats
taylor(e^x,x=0)	$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+x^6$.order_size($x$)
taylor(sin(x),x=0,3)	$x+\frac{x^3}{-6}+x^4$.order_size(x)
series(1/(1+x),0,5)	$1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6$.order_size(x)