# DÉRIVATION

## 1 ) FONCTION DÉRIVABLE – NOMBRE DÉRIVÉ

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle ou sur une réunion d'intervalles deux à deux disjoints et $a \in D_f$ .

**Définition :**

Dire que la fonction $f$ est dérivable en $a$ et que le nombre dérivé de $f$ en $a$ est le réel $L$, revient à dire que le taux de variation de $f$ en $a$, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, admet pour limite finie $L$ quand $h$ tend vers 0.

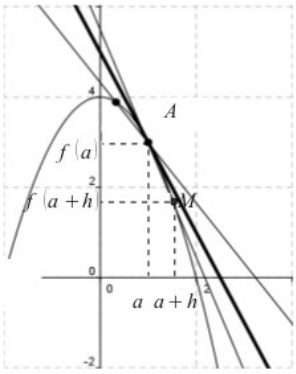
Le nombre dérivé est noté $f'(a)$, et on a: $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

## 2 ) INTERPRÉTATION GRAPHIQUE - TANGENTE EN UN POINT

Soit $M$ le point de $C_f$ d'abscisse $a+h$.

Le coefficient directeur de la droite $(AM)$ est : $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Géométriquement, la tangente à $C_f$ au point $A$ se conçoit comme la droite « position limite » des sécantes $(AM)$ lorsque $M$ tend vers $A$ en restant sur la courbe.
Si $f$ est dérivable en $a$, la « position limite » de ces sécantes a pour coefficient directeur $f'(a)$, et passe par $A$.




**Propriété :**

Si $f$ est dérivable en $a$, la courbe $C_f$ admet au point $A(a\,;f(a))$ une tangente $T$ de coefficient directeur $f'(a)$.
Une équation de la tangente en ce point est: $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

**Cas particuliers importants:**

- Si $f'(a)=0$, $C_f$ admet au point d'abscisse $a$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses (horizontale) d'équation $y=f(a)$.
- Si $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=+\infty$ ou $-\infty$, $f$ n'est pas dérivable en $a$, mais $C_f$ admet une tangente verticale d'équation $x=a$.

## 3 ) FONCTIONS DÉRIVÉES

### A ) DÉFINITION

**Définition :**

On dit qu'une fonction $f$ est **dérivable** sur un intervalle $I$ ( $I \subset D_f$ ) si pour tout $x$ appartenant à $I$, le nombre dérivé de $f$ en $x$ existe.
**La fonction dérivée** de $f$ sur $I$ est la fonction, notée $f'$, qui, à tout $x$ de $I$, associe le réel $f'(x)$.
Cette définition s'étend à une réunion d'intervalles disjoints.

*Par abus de langage, on dit que $f'$ est « la dérivée de $f$ »*

**Remarques :**
On appelle **ensemble de dérivabilité** de la fonction $f$, l'ensemble sur lequel la fonction dérivée $f'$ est définie.
Cet ensemble ( noté $D_{f'}$ ) est toujours inclus dans $D_f$ .

### B ) DÉRIVÉES DE QUELQUES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

| | Fonction $f$ | Fonction dérivée $f'$ | Ensemble de dérivabilité |
|---|---|---|---|
| 1 ) | $f: x \longmapsto k \ (k \in \mathbb{R})$ | $f': x \longmapsto 0$ | $\mathbb{R}$ |
| 2 ) | $f: x \longmapsto x$ | $f': x \longmapsto 1$ | $\mathbb{R}$ |
| 3 ) | $f: x \longmapsto \sqrt{x}$ | $f': x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0\,;+\infty[$<br>Cette fonction n'est pas dérivable en 0 |
| 4 ) | $f: x \longmapsto x^n \ (n \in \mathbb{Z}^*)$ | $f': x \longmapsto n\,x^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ si $n>0$<br>$\mathbb{R}^*$ si $n<0$ |
| 5 ) | $f: x \longmapsto \exp(x)$ | $f': x \longmapsto \exp(x)$ | $\mathbb{R}$ |
| 6 ) | $f: x \longmapsto \ln(x)$ | $f': x \longmapsto \frac{1}{x}$ | $]0\,;+\infty[$ |
| 7 ) | $f: x \longmapsto \cos(x)$ | $f': x \longmapsto -\sin(x)$ | $\mathbb{R}$ |
| 8 ) | $f: x \longmapsto \sin(x)$ | $f': x \longmapsto \cos(x)$ | $\mathbb{R}$ |

## 4 ) OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS DÉRIVABLES

$D$ représente un intervalle ou une réunion d'intervalles disjoints.

Propriétés :

Soit $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur $D$ et $k$ un réel.

- Les fonctions $k \cdot u$ , $u+v$ et $u \cdot v$ sont dérivables sur $D$ et :

$$(k \cdot u)' = k \cdot u' \quad , \quad (u+v)' = u'+v' \quad \text{et} \quad (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

- Si pour tout réel $a$ de $D$, $v(a) \neq 0$, les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur $D$ et :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad , \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$

**Propriétés :**

- Toute fonction polynôme est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

**Exemple:**
Soit $P$ le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P : x \longmapsto 3x^3 + 5x^2 - x + 3$

$P$ est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc $P$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x$ :
$P'(x) = 3 \times 3x^2 + 5 \times 2x - 1 = 9x^2 + 10x - 1$.

**Remarque:** Si $P$ est un polynôme de degré $n > 0$, alors $P'$ est un polynôme de degré $n-1$.

**Exemple:**

Soit $f$ la fonction rationnelle définie par $f : x \longmapsto \frac{2x^2+1}{x-1}$

On peut écrire $f = \frac{u}{v}$ où $u(x) = 2x^2 + 1$ et $v(x) = x - 1$

On a $v(x) = 0$ pour $x = 1$, donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$u$ et $v$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, donc $f$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et pour tout $x \neq 1$, on a:

$f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, donc $f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - v'(x) \times u(x)}{v(x)^2}$ avec $u'(x) = 2 \times 2x = 4x$ et $v'(x) = 1$

Donc $f'(x) = \frac{4x(x-1) - 1 \times (2x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{4x^2 - 4x - 2x^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 1}{(x-1)^2}$.

## 5 ) DÉRIVÉES SUCCESSIVES

**Définition :**

Soit $f$ est une fonction dérivable sur un intervalle $I$.
Sa fonction dérivée $f'$ s'appelle **dérivée première** (ou d'ordre 1) de $f$.
Lorsque $f'$ est dérivable sur $I$, sa fonction dérivée est notée $f''$. $f''$ est appelée **dérivée seconde** (ou dérivée d'ordre 2 ) de $f$.
Par itération, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on définit **la fonction dérivée *n*-ième** (ou d'ordre $n$ ) comme étant la fonction dérivée de la fonction d'ordre $n-1$ .

Notation : $f^{(1)} = f'$ et pour tout $n \geqslant 2$, $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$ .

**Exemple :**

$f : x \longmapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x) = 3x^2$ puis … $f''(x) = 6x$, $f^3(x) = 6$ et $f^4(x) = 0$

## 6 ) DÉRIVÉES DE $x \longmapsto [u(x)]^n$ (où $n$ est un entier relatif non nul) , $x \longmapsto e^{u(x)}$ , $x \longmapsto \ln(u(x))$

**Propriétés :**

- Soit $u$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ et $n$ un entier naturel non nul.

La fonction $f : x \longmapsto [u(x)]^n$ est dérivable sur $I$, et pour tout $x \in I$ , on a $f'(x) = n\,u'(x)[u(x)]^{n-1}$

- Soit $u$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$.

La fonction $f : x \longmapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur $I$, et pour tout $x \in I$ , on a $f'(x) = u'(x)\,e^{u(x)}$

- Soit $u$ une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle $I$.

La fonction $x \longmapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur $I$, et pour tout $x \in I$ , on a : $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

**Exemple :** Déterminer la dérivée de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x^2+1)^5$

$u : x \longmapsto 3x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$ , on a : $u'(x) = 6x$
On en déduit que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 5\,u'(x)\,(u(x))^4 = 5 \times 6x\,(3x^2+1)^4 = 30x\,(3x^2+1)^4$

**Exemple :** Déterminer la dérivée de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\cos(x)}$

$u : x \longmapsto \cos(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$ , on a : $u'(x) = -\sin(x)$

On en déduit que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = -\sin(x)\,e^{\cos(x)}$

**Exemple :** Déterminer la dérivée de la fonction $f$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par $\ln(\sqrt{x})$

$u : x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable et strictement positive sur $]0\,;+\infty[$ et pour $x \in ]0\,;+\infty[$ , on a : $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

On en déduit que $f$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x \in ]0\,;+\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2x}$

## 7 ) CAS GÉNÉRAL (complément)

**Propriété :**

Soit $g$ une fonction dérivable sur un intervalle $J$ et $u$ est une fonction dérivable sur un intervalle $I$, telle que pour tout $x$ de $I$, $u(x)$ appartient à $J$.
Alors la fonction $f$ définie par $f(x) = g(u(x))$ est dérivable sur $I$ et pour tout $x$ de $I$, on a :

$$f'(x) = u'(x) \times g'(u(x))$$

**Exemple :** Déterminer sur $]0\,;+\infty[$ la dérivée de la fonction $f$ définie par $f(x) = \sqrt{2x^3}$

Pour tout $x \in ]0\,;+\infty[$ , on pose : $f(x) = g(u(x))$ où $g : x \longmapsto \sqrt{x}$ et $u : x \longmapsto 2x^3$
La fonction $g$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x \in ]0\,;+\infty[$ , on a : $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$u : x \longmapsto 2x^3$ est strictement positive et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour $x \in \mathbb{R}$ , on a : $u'(x) = 6x^2$
On en déduit que $f$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x > 0$, on a : $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{6x^2}{2\sqrt{2x^3}} = \dfrac{3x^2}{\sqrt{2x^3}}$

**Exemple :** Déterminer la dérivée de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ , on pose : $f(x) = g(u(x))$ où $g : x \longmapsto \sin x$ et $u : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$
La fonction $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ , on a : $g'(x) = \cos x$
La fonction $u$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ , on a : $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
(Pour tout $x \neq 0$ , on a bien sûr $u(x) \in \mathbb{R}$ ... Dans la pratique, quand la fonction $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ , cette vérification n'est pas nécessaire )

On en déduit que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \neq 0$, on a : $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$