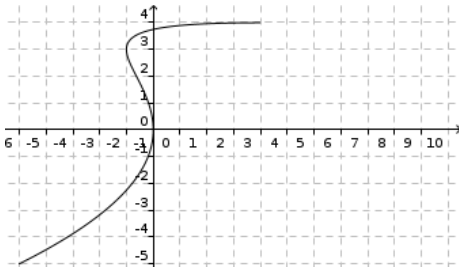
COURBES PARAMÉTRÉES

1) INSUFFISANCE DES FONCTIONS À VALEURS DANS $\mathbb{R}$

Comme vous le savez, par une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, un réel donné ne possède qu'une seule image.
La conséquence graphique est que la courbe représentant une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ ne peut pas couper deux fois une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

Une représentation comme celle-ci est donc impossible :



Ainsi, nous allons chercher à interpréter la courbe ci-dessus comme la représentation graphique d'un autre type de fonction.

2) DÉFINITION

Soit f et g deux fonctions à valeurs réelles, définies sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$.

La fonction $\vec{F}$ qui, à tout t de I, associe le couple $(f(t), g(t))$ est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

La fonction $\vec{F}$ est dérivable en t_0 de I si et seulement si les deux fonctions f et g sont dérivables en t_0.

Si $\vec{F}$ est dérivable en tout t de I, la fonction dérivée $\vec{F}'$ de $\vec{F}$ est la fonction définie sur I par $\vec{F}'(t) = (f'(t), g'(t))$

Plus généralement, pour étudier $\vec{F}$, on est conduit à mener une étude conjointe de deux fonctions f et g et à dresser un tableau de variations de ces deux fonctions.

La représentation graphique de $\vec{F}$ dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est l'ensemble des points M d'abscisse $f(t)$ et d'ordonnée $g(t)$, c'est à dire l'ensemble C des points M tels que $\overrightarrow{OM} = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}$ lorsque t parcours l'intervalle I.
Cet ensemble C est défini par la donnée de :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, t \in I$$

On dit qu'il s'agit d' **une représentation paramétrique** de C.

En interprétant **le paramètre** t comme le temps, **une courbe paramétrée** représente le mouvement d'un point dans le plan.

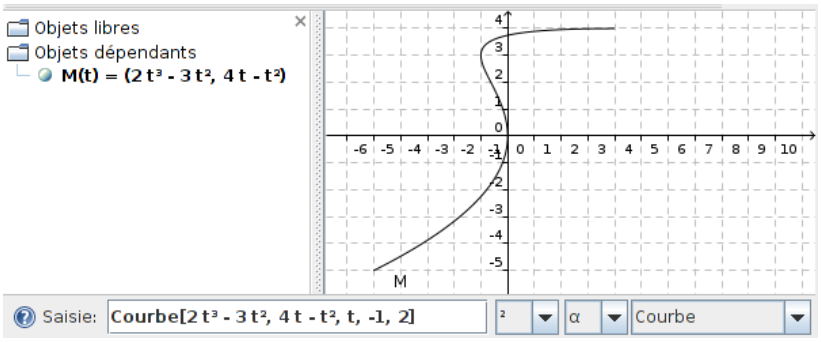
L'ensemble des points du plan atteints par le mouvement est appelé **support** ou **trajectoire**.

Exemple :

Ci-contre, une capture d'écran réalisée avec GeoGebra.

- Déterminer la fonction représentée par cette courbe.

Il s'agit de la fonction $\vec{F}$ définie sur $[-1 ; 2]$ par :
$\vec{F}(t) = (2t^3 - 3t^2 ; 4t - t^2)$



- Caractériser la représentation paramétrique de cette courbe.

$$\begin{cases} x = 2t^3 - 3t^2 \\ y = 4t - t^2 \end{cases}, t \in [-1 ; 2]$$

2) TANGENTE EN UN POINT

Définition :

Soit C la courbe définie dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ par la représentation paramétrique
$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$, où t appartient à un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Le vecteur $\vec{V}(t)$, de cordonnées $f'(t)$ et $g'(t)$, est appelé **vecteur dérivé**.

Si $\vec{V}(t_0)$ n'est pas le vecteur nul, alors la courbe C a une **tangente** en $M(t_0)$ dont $\vec{V}(t_0)$ est **un vecteur directeur**.

Remarques :

- $\vec{V}(t_0) \neq \vec{0}$ si et seulement si $f'(t_0) \neq 0$ ou $g'(t_0) \neq 0$
- Si C a une tangente en $M(t_0)$ et si $f'(t_0) \neq 0$, alors le coefficient directeur de cette tangente est $\dfrac{g'(t_0)}{f'(t_0)}$
- Le vecteur $\vec{V}(t)$ est aussi appelé **vecteur vitesse**.
- Si $\vec{V}(t_0) = \vec{0}$, nous ne disposons d'aucune information sur l'existence éventuelle d'une tangente à C. On dit que $M(t_0)$ est **un point stationnaire**. C'est un point d'arrêt sur le trajectoire.

3) ÉTUDE D'UN EXEMPLE

Soit la courbe paramétrée définie sur $[-2\,;3]$ par $\begin{cases} f(t) = 2t - 3t^2 \\ g(t) = 4t - t^2 \end{cases}$

Les fonctions f et g sont dérivables sur $[-2\,;3]$ et pour tout $t \in [-2\,;3]$, on a :
$f'(t) = 2 - 6t$ et $g'(t) = 4 - 2t$

On en déduit le tableau ci-dessous :

t	-2		$\frac{1}{3}$		2		3
$f'(t)$	14	+	0	-	-10	-	-16
$f(t)$	-16	↗	$\frac{1}{3}$	↘	-8	↘	-21
$g(t)$	-12	↗	$\frac{11}{9}$	↗	4	↘	3
$g'(t)$	8	+	$\frac{10}{3}$	+	0	-	-2

En plaçant quelques points caractéristiques et les vecteurs directeurs associés, on obtient :

