LIMITE DUNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

1) GÉNÉRALITÉS

Étudier la limite d'une suite (u_n), c'est examiner le comportement des termes u_n lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$.

Soit une suite (u_n).

cas 1

Intuitivement, si ***« u_n est aussi grand que l'on veut dès que n est assez grand »*** , alors on dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

On note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

On dit aussi :

Pour tout réel a , on peut trouver un rang à partir duquel tous les termes u_n sont supérieurs à a .

Exemple : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

cas 2

Intuitivement, si les termes u_n finissent par être négatifs et ***« si u_n est aussi grand que l'on veut en valeur absolue dès que n est assez grand »***, alors on dit que la suite (u_n) a pour limite $-\infty$.

On note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Exemple : $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty$

Remarque : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} -u_n = +\infty$

cas 3 (suite convergente)

Soit L un réel donné.

Intuitivement, dire que (u_n) a pour limite L , signifie que lorsque n est de plus en plus grand, **« les nombres u_n correspondants viennent s'accumuler autour de L ».**

On note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$

On dit aussi :

Pour tout $p\in\mathbb{N}$, on peut trouver un rang à partir duquel tous les termes u_n sont tels que $|u_n - L| < 10^{-p}$

Exemple : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

Remarque :

Si une suite (u_n) a une limite finie L , alors la limite L est unique.

cas 4

Aucun des trois cas ne se produit.

Exemple :

La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ prend successivement les valeurs 1 et -1.
Ainsi (u_n) n'a pas pour limite $+\infty$, n'a pas pour limite $-\infty$ et n'a pas pour limite un réel.

Remarque : Une suite qui ne converge pas est **divergente**. (cas 1 , cas 2 , cas 4)

2) LIMITE DE LA SUITE (q^n) où $q \in \mathbb{R}$

Propriété :

Soit $q \in \mathbb{R}$. • Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ • Si $q = 1$, alors pour tout n , $q^n = 1$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$	• Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ • Si $q \leqslant -1$, alors la suite (q^n) est divergente

Exemple :

La suite (u_n) définie par $u_n = 2^n$ est une suite géométrique de raison 2 supérieur à 1 ; elle est donc divergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Remarque :

On en déduit facilement la limite d'un suite géométrique de terme général $u_0 q^n$.

Exemple :

Soit (v_n) La suite définie par $v_n = -5 \times 2^n = -5 \times u_n$ où $u_n = 2^n$.

On a vu que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$; on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.