# LOI BINOMIALE

## 1 ) EXPÉRIENCES IDENTIQUES ET INDÉPENDANTES

**Définition :**

On considère $n$ ( où $n \in \mathbb{N}^*$ ) expériences aléatoires **identiques** successives . Si les résultats de chacune d'elles ne dépendent pas des résultats des expériences précédentes, on dit que ces expériences sont **indépendantes**.

**Remarque :**
Lors de tirages successifs avec remise, les expériences sont indépendantes.

**Propriété :**

Lors de la répétition d'expériences identiques et indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat.

## 2 ) SCHÉMA DE BERNOULLI

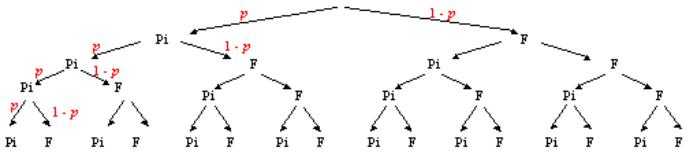
**Définition :**

On appelle **épreuve de Bernoulli** une épreuve ayant deux éventualités : l'éventualité $S$ avec la probabilité $p$ et l'éventualité $\overline{S}$ avec la probabilité $1-p$.

L'éventualité $S$ correspondra souvent au "succès" d'une expérience, $\overline{S}$ étant alors "l'échec".

**Exemple :**

On jette une pièce de monnaie.
Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli, les deux éventualités sont $Pi$ : "Pile" et $F$ : "Face".
Notons $P(Pi)=p$ et $P(F)=1-p$
(si la pièce est équilibrée, on a $P(Pi)=\frac{1}{2}$ et $P(F)=\frac{1}{2}$ ).




On répète quatre fois, de façon indépendante, le jet de cette pièce . On peut traduire la situation par un arbre pondéré.
L'univers de cette expérience aléatoire se compose de 16 quadruplets (un quadruplet est une liste de 4 éléments) de résultats correspondants chacun aux 16 chemins de l'arbre.

La probabilité d'obtenir le quadruplet $(Pi\,;Pi\,;F\,;Pi)$ est $p\times p\times(1-p)\times p=p^3(1-p)$

La probabilité d'obtenir trois fois Pile sur les quatre lancers est la probabilité de l'événement :

$\{(Pi\,;Pi\,;Pi\,;F)\,;(Pi\,;Pi\,;F\,;Pi)\,;(Pi\,;F\,;Pi\,;Pi)\,;(F\,;Pi\,;Pi\,;Pi)\}$
Elle est égale à $4\times p^3(1-p)$

Le nombre 4 correspond au nombre de choix des positions des trois $Pi$ dans la séquence de quatre (ou, ce qui est identique, au nombre de choix de la position du $F$ dans la séquence de quatre), c'est-à-dire le nombre de chemins de l'arbre réalisant 3 succès pour 4 répétitions.
Notons $X$ la variable aléatoire égale au nombre de "Pile" obtenus sur les quatre lancers.

On a $X(\Omega)=\{0\,;1\,;2\,;3\,;4\}$ et on a justifié que $P(X=3)=4\times p^3(1-p)$

En procédant de même, on en déduit la loi de probabilité de $X$ :

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=k)$ | $p^0(1-p)^4$ | $4\,p^1(1-p)^3$ | $6\,p^2(1-p)^2$ | $4\times p^3(1-p)$ | $p^4(1-p)^0$ |

**Définition :**

On appelle **schéma ( ou expérience ) de Bernoulli**, la répétition $n$ fois, de manière indépendante, d'une épreuve de Bernoulli.

**Remarque :**
On dit que la variable aléatoire de l'exemple précédent suit une loi binomiale de paramètres 4 (nombre de répétitions) et $p$ (probabilité du succès)

## 3 ) COEFFICIENTS BINOMIAUX

Dans l'exemple précédent, on a chaque fois déterminé le nombre de chemins de l'arbre réalisant $k$ ( $k \in \mathbb{N}$ et $k \leqslant 4$ ) succès pour 4 répétitions.
De façon plus générale,

**Définition :**

Le nombre de chemins de l'arbre réalisant $k$ succès ( $k \in \mathbb{N}$ et $k \leqslant n$ ) pour $n$ répétitions est le nombre noté $\binom{n}{k}$ .

On l'appelle **coefficient binomial** . $\binom{n}{k}$ Se lit " $k$ parmi $n$ ".

## 4 ) LOI BINOMIALE

**Propriété :**

On considère un schéma de Bernoulli consistant en la répétition $n$ fois, de manière indépendante, d'une épreuve de Bernoulli pour laquelle la probabilité du succès $S$ est $p$.
Si on note $X$ la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus sur les $n$ répétitions, la loi de probabilité de $X$ est donnée par :
pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$ , $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

**Définition :**

On dit que la loi de probabilité d'une variable aléatoire $X$ est une **loi binomiale de paramètres $n$ et $p$** lorsque :

- l'ensemble de ses valeurs est $\{0\ ;\ 1\ ;\ \ldots\ ;\ n\}$
- pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$ , $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Cette loi est souvent notée $B(n\ ;\ p)$

**Propriété :**

La loi binomiale de paramètres $n$ et $p$ a pour :

- espérance mathématique : $E(X) = np$
- variance : $V(X) = np(1-p)$
- écart type : $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

## 5 ) UTILISATION D'UNE CALCULATRICE ET D'UN ORDINATEUR

### A ) POUR DÉTERMINER DES COEFFICIENTS BINOMIAUX

Par exemple $\binom{3}{2} = 3$

| | |
|---|---|
| Sur Texas instrument (82 stat, 83 & 84) | Écrire $n$ (ici 3) puis entrer la fonction « Combinaison » (qui est dans le menu « Math/Prb ») puis l'argument $k$ (ici 2).<br>Si les instructions sont en anglais, la fonction sera « nCr » dans le même menu qu'indiqué. |
| Sur TI-NSpire | Dans une page calcul entrer « nCr(3,2). |
| Sur Casio | Écrire $n$ (ici 3) puis entrer la fonction « nCr » (dans « OPTN » puis « PROB ) puis l'argument $k$ (ici 2). |
| Utilisation d'un tableur | Dans une cellule écrire « =COMBIN(3;2)». |

### B ) POUR DÉTERMINER $P(X=k)$ POUR UNE LOI BINOMIALE DE PARAMÈTRES $n$ ET $p$

Par exemple, pour $n=1000$ , $p=0{,}5$ *et* $k=462$, on obtient $P(X=462) \approx 0{,}0014$

| | |
|---|---|
| Sur Texas instrument (82 stat, 83 & 84) | Entrer la fonction « binomFdp(n,p,k) » (qui est dans le menu « distrib ») avec les arguments $n=1000$ , $p=0{,}5$ *et* $k=462$. |
| Sur TI-NSpire | Dans une page calcul entrer « binomPdf(1000,0.5,462) »<br>(rappel : les points sont des virgules, les virgules des caractères de séparation des variables). |
| Sur Casio | Entrer la fonction « BinomialPD(*k,n,p*) » (dans « OPTN » puis « STAT » puis « DIST » puis « BINM » et « Bpd » pour finir) avec les arguments $n=1000$ , $p=0{,}5$ *et* $k=462$. |
| Utilisation d'un tableur | Dans une cellule écrire « =LOI.BINOMIALE(valeur de $k$ ; $n$ ; $p$ ;FAUX) ».<br>Sur certains tableurs au lieu de « FAUX » il faut écrire 0. |

### C ) POUR DÉTERMINER $P(X \leqslant k)$ POUR UNE LOI BINOMIALE DE PARAMÈTRES $n$ ET $p$

Par exemple pour $n=1000$ , $p=0{,}5$ *et* $k=462$, on obtient $P(X \leqslant 462) \approx 0{,}0088$

| | |
|---|---|
| Sur Texas instrument (82 stat, 83 & 84) | Entrer la fonction « binomFrép(*n,p,k*) » (qui est dans le menu « distrib »)avec les arguments $n=1000$ , $p=0{,}5$ *et* $k=462$. |
| Sur TI-NSpire | Dans une page calcul entrer « binomCdf(1000,0.5,0,462) » |
| Sur Casio | Entrer la fonction « BinomialCD(k,n,p) » (dans « OPTN » puis « STAT » puis « DIST » puis « BINM » et « Bcd » pour finir) avec les arguments k = 462 la valeur à tester,$n$ = 1000 et $p$ = 0,5. |
| Utilisation d'un tableur | Dans une cellule écrire « =LOI.BINOMIALE(valeur de $k$ ; $n$ ; $p$ ;VRAI) » que l'on tirera vers le bas.<br>Sur certains tableurs au lieu de « FAUX » il faut écrire 1. |

### D ) INTERPRÉTATION DE XCAS

```
binomial(4,2);
binomial(10,5,0.5);
binomial_cdf(20,0.4,12)
```

```
( 6, 0.24609375, 0.9789710725 )
```

- $\binom{4}{2} = 6$
- $P(X=5) \approx 0{,}25$ où X suit la loi binomiale $B(10\ ,0{,}5)$
- $P(Y \leqslant 12) \approx 0{,}98$ où Y suit la loi binomiale $B(20\ ,0{,}4)$