EXEMPLES DE LOIS À DENSITÉ

Il existe des variables aléatoires non discrètes, qui prennent toutes les valeurs d'un intervalle de $\mathbb{R}$. (borné ou non).

Exemples : Le temps d'attente à un arrêt de bus ; la durée de vie d'un transistor ; la distance du point d'impact au centre d'une cible …

On s'intéresse alors à des événements du type : " X prend ses valeurs dans l'intervalle I " .

1) LOI UNIFORME SUR [a;b]

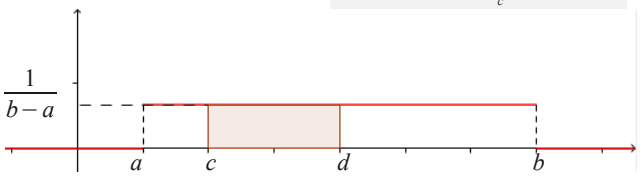
Définition :

Soit a et b deux réels tels que $a<b$.
Une variable aléatoire X suit **la loi uniforme** sur $[a\,;b]$ si :

- pour tout intervalle I inclus dans $[a\,;b]$, la probabilité de l'événement « $X\in I$» est l'aire du domaine $\{M(x\,;y)\ ;\ x\in I \text{ et } 0\leqslant y\leqslant f(x)\}$, où f est la fonction constante définie sur $[a\,;b]$ par $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$.
- pour tout intervalle I disjoint de $[a\,;b]$, la probabilité de l'événement « $X\in I$» est nulle.

On appelle **fonction de densité** de X, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} \text{ si } x\in[a\,;b]\\ 0 \text{ si } x\notin[a\,;b]\end{cases}$

Pour tout intervalle $[c\,;d]$, tel que $a\leqslant c\leqslant d\leqslant b$, on a : $P(c\leqslant X\leqslant d)=P(X\in[c\,;d])=\displaystyle\int_c^d \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t$



Propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a\,;b]$.
Pour tout intervalle $[c\,;d]$, tel que $a\leqslant c\leqslant d\leqslant b$, on a :

$$P(X\in[c\,;d])=\frac{d-c}{b-a}$$

Cette formule est à rapprocher de la formule :

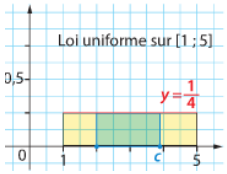
$$\frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

vue dans les situations d'équiprobabilité en nombre fini.

Remarques :

- La probabilité $P(X\in[c\,;d])$ est proportionnelle à l'amplitude de l'intervalle $[c\,;d]$.
- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=1$ ($[a\,;b]$ correspond à l'univers)
- Pour tout $m\in[a\,;b]$, on a $P(X=m)=P(m\leqslant X\leqslant m)=0$
  La probabilité que X prenne une valeur isolée de I est nulle.
- On en déduit que pour tous réels c et d de $[a\,;b]$, on a :
  $P(X\in[c\,;d])=P(X\in[c\,;d[)=P(X\in]c\,;d])=P(X\in]c\,;d[)$ et $P(X>c)=P(X\geqslant c)$, etc …

Exemple : On considère X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[1\,;5]$

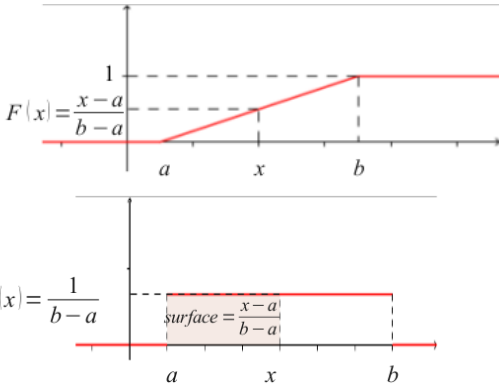


- $P(X\in[1\,;2])=P(X\in]4\,;5[)=\dfrac{1}{4}$
- Si $c\in[2\,;5]$, $P(X\in[2\,;c])=\dfrac{c-2}{4}$

Définition : ***Fonction de répartition***

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a\,;b]$.
On appelle **fonction de répartition** de X, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} \text{ si } a\leqslant x\leqslant b\\ 1 \text{ si } b<x\end{cases}$$



Propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a\,;b]$.
Pour tout intervalle $[c\,;d]$, tel que $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$, on a :

$$P(X \in [c\,;d]) = F(d) - F(c)$$

Définitions et propriétés :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a\,;b]$.

- **L'espérance** de X est $E(X) = \int_a^b t \times \frac{1}{(b-a)}\,\mathrm{d}\,t = \frac{a+b}{2}$
- **La variance** de X est $V(X) = \int_a^b t^2\, f(t)\,\mathrm{d}\,t - (E(X))^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$
- **L'écart type** de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarque :
L'espérance peut-être interprétée de la façon suivante : lorsqu'une expérience aléatoire faisant intervenir une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $[a\,;b]$ est répétée un très grand nombre de fois, la moyenne des valeurs prises par X se rapproche de $\frac{a+b}{2}$ qui est le centre le l'intervalle $[a\,;b]$.

2) LOI NORMALE

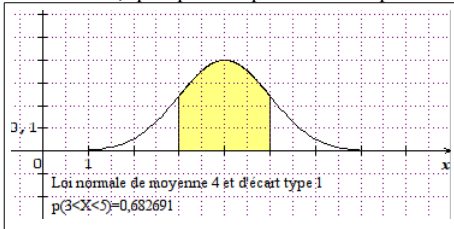
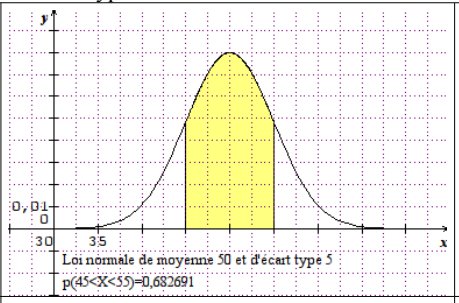
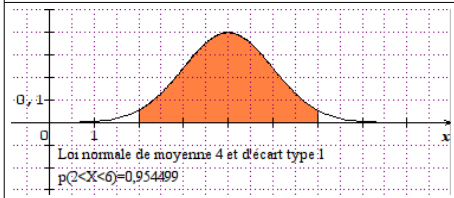
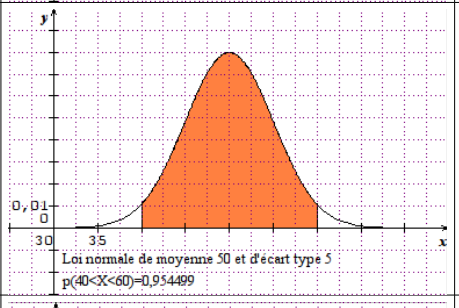
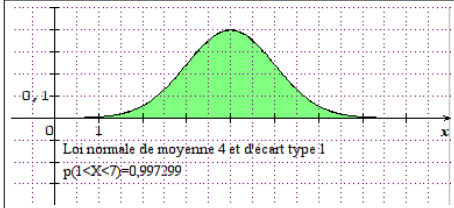
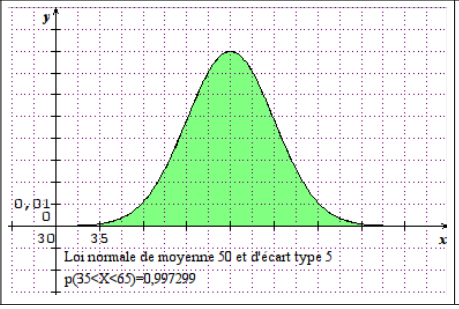
Définition :

Quand un phénomène aléatoire dont la moyenne est μ et l'écart type σ présente l'allure d'une courbe en cloche symétrique, on choisit très souvent pour modéliser ce phénomène par une densité adéquate, la densité d'une loi normale d'espérance μ et d'écart type σ.
On dit que la variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance μ et d'écart type σ et on note X suit $N(\mu\,;\sigma)$.

La formule de la densité d'une loi normale $N(\mu\,;\sigma)$ est très complexe : $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

Dans la pratique, on ne l'utilise pas, et on utilise des logiciels.
Par exemple, le logiciel « *Sine Qua Non* » nous permet de tracer les densités et de calculer des probabilités.

On constate, que quelles que soient l'espérance et l'écart type :

		$P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0{,}68$
		$P(\mu - 2\,\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\,\sigma) \approx 0{,}95$
		$P(\mu - 3\,\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\,\sigma) \approx 0{,}997$

Remarques :

- L'espérance correspond à l'abscisse du sommet de la courbe.
- Plus l'écart type est important, plus la courbe est étalée.

Propriété : ***Approximation de la loi binomiale par une loi normale***

Si la variable aléatoire X suit une loi binomiale $B(n\,;p)$, alors son espérance est $E(X)=np$ et son écart type est $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$.

Si $n\geqslant 30$, $np\geqslant 5$ et $n(1-p)\geqslant 5$, alors la loi binomiale peut être approchée par une loi normale de même espérance et de même écart type, $N(np\,;\sqrt{np(1-p)})$

3) ESPÉRANCE, VARIANCE : QUELQUES FORMULES

La notion d'indépendance de variables aléatoires est difficile . Nous nous en tiendrons à la définition suivante.

Deux variables aléatoires sont dites **indépendantes** quand le résultat de l'une n'influence pas celui de l'autre.

Exemples :
Lors de deux lancers de dés successifs, le résultat du premier n'a aucune influence sur celui du second.
Les deux variables aléatoires correspondantes, qui suivent la même loi, sont indépendantes.

Propriété :

Soit $a\in\mathbb{R}^*$, $b\in\mathbb{R}$ et X et Y deux variables aléatoires à densité admettant une espérance et une variance . On a :

- $E(aX+b)=aE(X)+b$.
- $V(aX+b)=a^2V(x)$
- $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$
- $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
- $E(X-Y)=E(X)-E(Y)$

Si de plus X et Y sont indépendantes,

- $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$
- $V(X-Y)=V(X)+V(Y)$

4) THÉORÈME DE LA LIMITE CENTRÉE

Théorème : ***Énoncé simplifié du théorème de la limite centrée***

Soit X_1, X_2, … X_n n variables aléatoires indépendantes de même loi de probabilité, de même espérance m et de variance σ^2.
Lorsque n est suffisamment grand :

- La variable aléatoire $S_n=X_1+X_2+...+X_n$ suit approximativement une loi normale d'espérance $m\times n$ et d'écart type $\sigma\sqrt{n}$, notée $N(m\times n\,,\sigma\sqrt{n})$
- La variable aléatoire $Y_n=\dfrac{S_n}{n}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y de loi normale $N\left(m\,,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$