CONDITIONNEMENT – INDÉPENDANCE

1) PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Définition :

Soit A et B deux événements tels que $P(B) \neq 0$.
On appelle « **probabilité conditionnelle de A par rapport à B** » ou « **probabilité de A sachant B**» le réel, noté $P_B(A)$ (parfois noté $P(A/B)$ défini par :

Exemple :

Un lycée a présenté 356 candidats au bac, dont 96 en série S. 256 élèves ont été admis à l'examen ; parmi eux 64 provenaient de la série S.
Un élève étant choisi au hasard parmi les candidats présentés par le lycée, on note A l'événement : « l'élève provient de la série S » et B l'événement : « l'élève a été reçu au bac ».
Chaque élève a la même chance d'être choisi ; par équiprobabilité, on a donc :

$P(A) =$, $P(B) =$ et $P(A \cap B) =$

En général :

On en déduit que $P_B(A) =$

La probabilité que l'élève provienne de la série S **sachant qu'il est reçu au bac**, est donc égale à

On a aussi $P_A(B) =$

Ainsi la probabilité que l'élève soit reçu au bac **sachant qu'il provient de la série S** est

Remarques :

- Si $A \subset B$, alors
- Si $B \subset A$, alors .

Propriétés :

Soit A et B deux événements tels que $P(B) \neq 0$. On a :

$$0 \leqslant P_B(A) \leqslant 1 \quad \text{et} \quad P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A)$$

2) PROBABILITÉ D'UNE INTERSECTION

Propriété : *Formule des probabilités composées*

Soit A et B deux événements tels que $P(B) \neq 0$ et $P(A) \neq 0$. On a :

Ces égalités se déduisent de la définition précédente.

Ces deux égalités se retiennent assez facilement : pour que l'événement A et B soit réalisé, il faut d'abord que l'événement A le soit, et sachant que l'événement A est réalisé, il faut ensuite que l'événement B le soit aussi …

Exemple :

Une urne contient trois boules bleues et cinq rouges, indiscernables au toucher.
On tire au hasard une première boule de l'urne . Si elle est bleue, on la remet dans 1'urne et on rajoute une autre boule bleue ; si elle est rouge, on ne la remet pas dans l'urne . On tire ensuite, au hasard, une seconde boule de l'urne.
On s'intéresse à la probabilité pour que les deux boules extraites soient bleues.

B_1 est l'événement : « la première boule extraite est bleue » ; B_2 est l'événement : « la seconde boule extraite est bleue ».
L'événement « les deux boules extraites sont bleues » est alors $B_1 \cap B_2$.

On a $P(B_1 \cap B_2) =$

Les boules ont la même chance d'être tirées ; par équiprobabilité, on a donc : $P(B_1) =$

B_1 étant réalisé, on rajoute une boule bleue, si bien qu'au moment du second tirage il y a 4 boules bleues sur 9 boules dans l'urne.

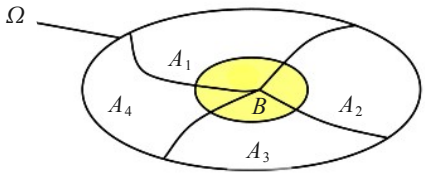
Ce qui permet d'écrire $P_{B_1}(B_2) =$

On en déduit : $P(B_1 \cap B_2) =$

La probabilité que les deux boules extraites soient bleues est donc égale à

3) RÈGLES DE CONSTRUCTION D'UN ARBRE PONDÉRÉ (ou arbre de probabilités)

Ω est l'univers des événements élémentaires d'une expérience aléatoire . A_1 , A_2 , … , A_n désignent des événements de Ω .

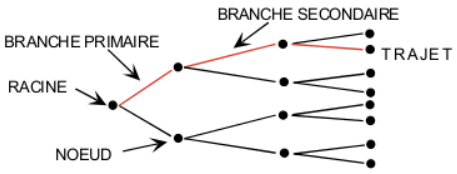


Définition :

Dire que A_1 , A_2 , … , A_n réalisent **une partition** de l'univers Ω , signifie que :
- les événements A_1 , A_2 , … , A_n sont deux à deux disjoints
- $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega$

Pour déterminer des probabilités, on peut être amené à construire des arbres dont les branches sont affectées de probabilités.

- Un arbre pondéré se construit et se lit de gauche à droite.
- L'origine de l'arbre est la **racine** de l'arbre.
- Les traits partant de la racine sont appelés **branches primaires** de l'arbre. Elles mènent à des **nœuds**.
- Les branches joignant deux nœuds sont dites **secondaires.**
- Tout chemin menant de la racine à un nœud est appelé **trajet.**



Règles :

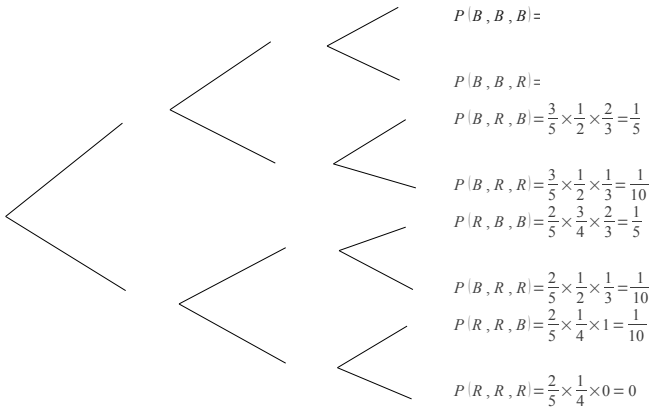
1. Les événements qui se trouvent aux extrémités des branches primaires forment une **partition** de l'univers Ω .
2. Le **poids** d'une branche primaire est la **probabilité** de l'événement qui se trouve à son extrémité.
3. Le poids d'une branche secondaire est la **probabilité conditionnelle** de l'événement qui se trouve à son extrémité sachant que le trajet menant à son origine a été réalisé.
4. Le poids ou la probabilité d'un trajet est le **produit** des poids des branches le constituant. *(Probabilités composées)*
5. La probabilité d'un événement associé à plusieurs trajets complets est la **somme** des probabilités de ces trajets. *(Probabilités totales)*

Remarques :
- La somme des poids des branches primaires vaut 1. *(règle 1)*
- La somme des poids des branches secondaires issues d'un même nœud vaut 1.

Exemple :

Une urne contient trois boules bleues et deux boules rouges.
On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne.
L'expérience aléatoire peut être décrite par l'arbre pondéré suivant :

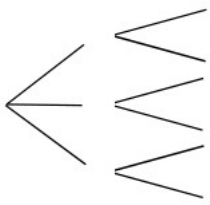
- La probabilité que la troisième boule soit rouge sachant que les deux premières étaient bleues est
- La probabilité de l'événement (B , B , B) est
- Soit A l'événement : « tirer une seule boule rouge » .



Remarque :
Pour des expériences indépendantes, la probabilité de la liste des résultats est le produit des probabilités de chaque résultat.

Exemple :

Un test d'une maladie est effectué sur la totalité d'une population.
Une étude statistique établit que 70 % de la population réagit négativement au test (événement N) , 20 % réagit faiblement au test (événement F) et 10 % réagit fortement au test (événement R).
La probabilité pour une personne de cette population d'être atteinte de la maladie (événement M) est :
- 0,9 lorsque le test est fortement positif
- 0,6 lorsque le test est faiblement positif
- 0,05 lorsque le test est négatif



Par hypothèse, on a donc :

$P(R) =$, $P(F) =$, $P(N) =$, $P_R(M) =$, $P_F(M) =$ et $P_N(M) =$

Les événements R , F et N constituent une partition de la population.

D'après l'arbre pondéré, on a :

$P(M) =$.

La probabilité pour qu'une personne de cette population soit atteinte de la maladie est donc égale à

4) ÉVÈNEMENTS INDÉPENDANTS

Deux évènements A et B de probabilités non nulles sont dits **indépendants** si le fait que l'un d'entre eux soit réalisé ou non n'influe pas la probabilité que l'autre soit réalisé, c'est à dire :
si $P_B(A) = P(A)$ ou si $P_A(B) = P(B)$
En utilisant la propriété précédente, on constate que l'indépendance de A et B se traduit par la relation $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Définition :

Soit A et B deux événements de probabilités non nulles.
A et B sont dits **indépendants** s'ils vérifient l'une des trois conditions équivalentes suivantes :
-
-
-

Exemple :
Une urne contient quatre boules bleues numérotées b_1 , b_1 , b_2 et b_3 , et six boules rouges numérotées r_1 , r_1 , r_1 , r_2 , r_3 et r_4.
On suppose toutes ces boules indiscernables au toucher, et on en tire une au hasard.
On considère les événements :
B : « la boule tirée est bleue » ; R : « la boule tirée est rouge » ; Q : « la boule tirée porte le numéro 4 » ; U : « la boule tirée porte le numéro 1 ».
Les boules ont la même chance d'être tirées ; par équiprobabilité, on a donc :

$P(U) =$; $P(B) =$ et $P(B \cap U) =$

On a :

Ce résultat s'explique en remarquant que la proportion des boules bleues portant le numéro 1 parmi les boules portant le numéro 1 est la même que celle des boules bleues parmi les boules de l'urne.

On a aussi $P(Q) =$, $P(B) =$ et $P(Q \cap B) =$

On a :

Remarques :

- Tout évènement A est indépendant de l'évènement certain et de l'évènement impossible.
- Ne pas confondre événements **incompatibles** et événements **indépendants**.

Deux événements A et B sont incompatibles si et seulement si

Dans l'exemple précédent, les événements B et U sont indépendants, mais non incompatibles ; les événements B et Q sont incompatibles et non indépendants.

Propriété :

Soit A et B deux événements de probabilités non nulles.
Si A et B sont deux événements indépendants , alors il en est de même pour $\overline{A}$ et B.