Exercice 1 :

Calculer les intégrales suivantes et vérifier avec un logiciel de calcul formel :

$\int_1^2 x^2-\frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x$ $\quad$ $\int_0^2 x^2e^{x^3}\ \mathrm{d}x$ $\quad$ $\int_{-1}^1 x^3(x^4+1)^{10}\ \mathrm{d}x$

$\int_{-\pi}^{\pi} 2\cos(3x+5)-\sin(2x-4)\ \mathrm{d}x$ $\quad$ $\int_3^5 \frac{x}{(x^2-1)^6}\ \mathrm{d}x$

Exercice 2 : *Interprétation de Xcas*

```
g(t):=3*exp(-3*t);
f(x):=integrate(g(t),t,0,x);
f(x);
limite(f(x),x,+infinity)
```

$$(\ t\ \to 3\cdot\exp((-3)\cdot t),\ \ x\ \to \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t,\ -\exp(-3\cdot x)+1,\ 1\ )$$

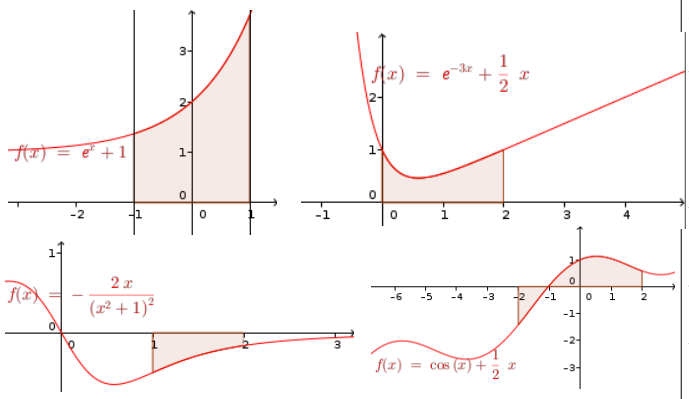
1) Interpréter chacune des lignes ci-dessus.

2) Interpréter ce résultat graphiquement.

Calculs d'aires

Exercice 3 :

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer l'aire (en unité d'aire) du domaine colorié :



Propriétés de l'intégrale

Exercice 4 :

Soit a et b des nombres réels tels que $a<b$, f et g des fonctions continues sur $[a\,;b]$.

On pose $I=\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ et $J=\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$

Exprimer les intégrales suivantes en fonction de I et J.

1) $\int_a^b 2f(x)\ \mathrm{d}x$ $\quad$ 2) $\int_a^b f(x)-g(x)\ \mathrm{d}x$

3) $c\in[a\,;b]$, $\int_b^c g(x)\ \mathrm{d}x$ - $\int_a^c g(x)\ \mathrm{d}x$

4) $\int_a^b -3x+\frac{2}{3}g(x)\ \mathrm{d}x$

Exercice 5 :

Dans chacun des cas, étudier le signe de la fonction f sur l'intervalle d'intégration, puis calculer l'intégrale en utilisant la relation de Chasles.

1) $f(x)=-x+2$ et $\int_0^5 |f(x)|\ \mathrm{d}x$

2) $f(x)=-x^2+x-2$ et $\int_{-3}^3 |f(x)|\ \mathrm{d}x$

Exercice 6 :

On pose $I=\int_0^{\pi}\cos^2 x\ \mathrm{d}x$ et $J=\int_0^{\pi}\sin^2 x\ \mathrm{d}x$.

Rappel : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ et $\cos^2 x-\sin^2 x=\cos(2x)$

1) Calculer $I+J$ et $I-J$

2) En déduire les valeurs de I et de J .

Exercice 7 :

On considère les fonctions f et g respectivement définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{x^3+2x^2+2x+6}{x^2+3}$ et $g(x)=x+2$.

On pose $I=\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x$ et $J=\int_0^1 g(x)\ \mathrm{d}x$

1) Calculer J

2) Calculer $K=\int_0^1 f(x)-g(x)\ \mathrm{d}x$

3) En déduire I .

Exercice 8 :

On considère les fonctions f , g et h définies sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x)=x$, $g(x)=x+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ et $h(x)=x+\ln(2)$.

1) a)Justifier que pour tout $x\geqslant 1$, $0\leqslant \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\leqslant \ln 2$

b) En déduire que pour tout $x\geqslant 1$, $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$.

2)a) Quel est le signe de $\int_1^2 g(x)-f(x)\,\mathrm{d}x$?

b) Comparer $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x$

3)a) Quel est le signe de $\int_1^2 h(x)-g(x)\,\mathrm{d}x$?

b) Comparer $\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_1^2 h(x)\,\mathrm{d}x$

4)a) Calculer $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_1^2 h(x)\,\mathrm{d}x$

b) En déduire un encadrement de $\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 9 :

1) Démontrer que pour tout $x\geqslant 1$, $\frac{1}{x^2}\leqslant\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}}$

2) En déduire que $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

3) Déterminer un encadrement du réel $\ln(2)$

Valeur moyenne

Exercice 10 :

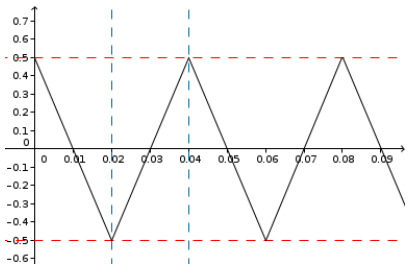
La fonction f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\frac{8}{x^2}$

1) Calculer la valeur moyenne m de f sur $[2\,;8]$.

2) Quelle est la longueur d'un rectangle de largeur m et dont l'aire vaut $\int_2^8 f(x)\,\mathrm{d}x$?

Exercice 11 :

On considère un circuit électrique traversé par un courant périodique dont l'intensité I (en ampères) évolue en fonction du temps t (en secondes) de la manière décrite par le graphique ci-dessous :



1) Quelle est la fréquence de l'intensité ?
2) Expliquer pourquoi pour $t \in [0\,;0{,}02]$, $i(t) = -50\,t + 0{,}5$
3) Déterminer les nombres a et b tels que, pour tout $t \in [0{,}02\,;0{,}04]$, $i(t) = a\,t + b$.
4) On note I_e la valeur efficace de i .
Par définition $I_e \geqslant 0$ et ${I_e}^2$ est la valeur moyenne du carré de i .
Donc ${I_e}^2 = \dfrac{1}{0{,}04}\displaystyle\int_0^{0{,}04} (i(t))^2\,\mathrm{d}\,t$

a) Pour $t \in [0\,;0{,}02]$, calculer $i(t)^2$, puis $\displaystyle\int_0^{0{,}02} i(t)^2\,\mathrm{d}\,t$

b) Pour $t \in [0{,}02\,;0{,}04]$, calculer $i(t)^2$, puis $\displaystyle\int_{0{,}02}^{0{,}04} i(t)^2\,\mathrm{d}\,t$

c) En déduire ${I_e}^2$.
d) Donner la valeur exacte de I_e , puis en donner l'arrondi au millième.

Intégration par parties

Exercice 12 :
En utilisant une intégration par parties, calculer les intégrales ci-dessous :

a) $\displaystyle\int_1^3 (x+2)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}\,x$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi} (x-1)\sin(x)\,\mathrm{d}\,x$ c) $\displaystyle\int_0^1 (2-x)\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}\,x$
d) $\displaystyle\int_1^e (x-5)\ln(x)\,\mathrm{d}\,x$ e) $\displaystyle\int_1^e (x^2+3x-5)\ln(2\,x)\,\mathrm{d}\,x$

Exercice 13 :

A l'aide d'une double intégration par parties, calculer la valeur exacte des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-x}\sin(x)\,\mathrm{d}\,x$ b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{2\,t}\cos(6\,t)\,\mathrm{d}\,t$

Exercice 14 :

Soit n un entier relatif différent de -1 .
1) Calculer l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_1^e x^n \ln(x)\,\mathrm{d}\,x$
2) En déduire la calcul de l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_1^e x^n (\ln(x))^2\,\mathrm{d}\,x$

Exercice 15 :
Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3 - 3\,x^2 + x}{1-x}$
1) Interpréter, puis démontrer le résultat ci-dessous :

```
f(x):=(x^3-3*x^2+x)/(1-x)
                    x -> (x^3-3*x^2+x)/(1-x)
partfrac(f(x))
                    -x^2+2*x+1+1/(x-1)
```

2) Calculer $\displaystyle\int_0^{0{,}5} f(x)\,\mathrm{d}\,x$
3) A l'aide d'une intégration par parties, calculer
$\displaystyle\int_0^{0{,}5} (3\,x^2 - 6\,x + 1)\ln(1-x)\,\mathrm{d}\,x$

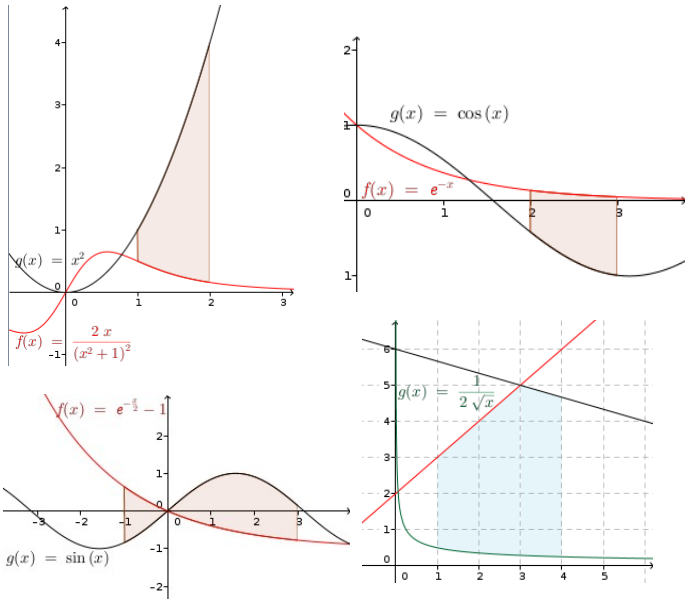
Exercice 16 :

On se propose de calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 (2\,x+1)\ln(x+2)\,\mathrm{d}\,x$
1) Monter que le calcul de I peut se ramener au calcul de
$K = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+x}{x+2}\,\mathrm{d}\,x$
2) Déterminer trois réels a , b et c tels que pour tout $t \neq -2$, on ait :
$$\frac{x^2+x}{x+2} = a\,x + b + \frac{c}{x+2}$$
Calculer alors K .
3) Calculer I ; on donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième près.

Calculs d'aires

Exercice 17 :

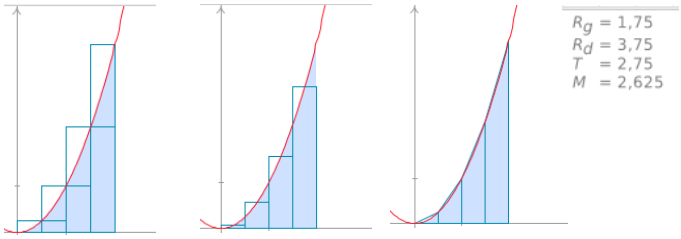
Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer l'aire (en unité d'aire) du domaine colorié :



Approximations

Exercice 18 :

Ci-dessous, on a représenté trois algorithmes fournissant des approximations de $\displaystyle\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}\,x$.
1) On reconnaît la méthode des trapèzes, la méthode des rectangles et la méthode du point milieu.



Faire correspondre chaque dessin avec la méthode qu'il représente et expliquer chacune de ces méthode.
2) Calculer $\displaystyle\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}\,x$ et comparer avec les approximations obtenues.