INTÉGRALES

1) DÉFINITION

Définition :

Soit f est une fonction dérivable sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
Pour tous réels a et b de I, on appelle intégrale de a à b de f le nombre réel $F(b)-F(a)$.
On note :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b)-F(a)$$

Deux primitives de f diffèrent d'une constante .
Ainsi le nombre $F(b)-F(a)$ est indépendant du choix de la primitive de f sur I.

Remarques :

- On dit que a et b sont les bornes de l'intégrale.
- $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ se lit : " intégrale ou somme de a à b de $f(t)\mathrm{d}t$ ".
- La variable t est appelée variable "muette".
  On peut remplacer t par n'importe quelle autre variable : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
- On note aussi $F(b)-F(a)=\left[F(t)\right]_a^b$ qui se lit : " $F(t)$ pris entre a et b ".

Exemples :

- $\int_1^2 5\,\mathrm{d}t = \left[5t\right]_1^2 = 10-1=9$
- $\int_1^e \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \left[\ln t\right]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$
- $\int_2^1 x^2+x\,\mathrm{d}t = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_2^1 = \frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\left(\frac{8}{3}+\frac{4}{2}\right)=-\frac{23}{6}$

On n'a pas nécessairement $a \leqslant b$

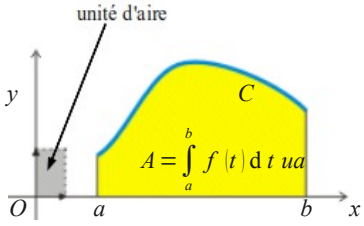
Utilisation de Xcas :
Il n'est pas toujours possible, voire impossible de déterminer une primitive . Dans ce cas, ou de façon générale pour vérifier les calculs, il est possible d'utiliser un logiciel de calcul formel comme Xcas.
Pour le troisième exemple la commande est : « int(x^2+x,x,2,1) »

2) INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

A) CAS D'UNE FONCTION POSITIVE

Propriété :

Soit f une fonction dérivable et positive sur un intervalle $[a\,;b]$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.
le réel $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ mesure l'aire A, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe C, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$, c'est-à-dire l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $\begin{cases} a\leqslant x\leqslant b \\ 0\leqslant y\leqslant f(x)\end{cases}$



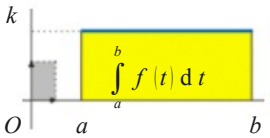
On appelle domaine D associé à une fonction f sur $[a\,;b]$ le domaine limité par la courbe C, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

Remarques :

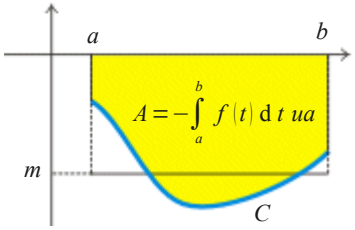
- L'unité d'aire est l'aire du rectangle défini par les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
  Si le repère a pour unités graphiques 2 cm sur l'axe (Ox) et 3 cm sur l'axe (Oy), alors l'unité d'aire est $6\ cm^2$.
- On a précisé que f doit être dérivable sur $[a\,;b]$. En fait, il suffit de dire « continue » ce qui signifie pour simplifier (sauf exception tordue) que l'on peut tracer la courbe représentant f sans lever le crayon.

Exemples :

- Si $a=b$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
- Pour $k>0$, $\int_a^b k\,\mathrm{d}t = k(b-a)$. Le domaine D est un rectangle.



B) CAS D'UNE FONCTION NÉGATIVE

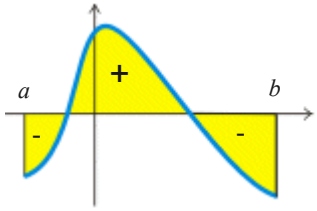


Propriété :

Si f est dérivable est négative sur $[a\,;b]$, le réel $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t$ mesure l'opposé de l'aire A , en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe C , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$

On dit parfois que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t$ est l'aire algébrique du domaine pour indiquer qu'elle est positive si f est positive sur [a ; b], et négative si f est négative sur [a ; b].

C) CAS D'UNE FONCTION CHANGEANT DE SIGNE



Propriété :

Si f est une fonction dérivable qui change de signe sur [a ; b], le réel $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t$ mesure la différence entre le nombre correspondant à l'aire obtenue lorsque f est positive et le nombre correspondant à l'aire obtenue lorsque f est négative.

3) ÉTUDE DE $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$

Théorème :

Soit f est une fonction dérivable sur un intervalle $[a\,;b]$.

La fonction F définie sur $[a\,;b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$ est dérivable sur $[a\,;b]$ et a pour dérivée f.

Plus précisément, F est l'unique primitive de f sur $[a\,;b]$ s'annulant en a.

Remarque :

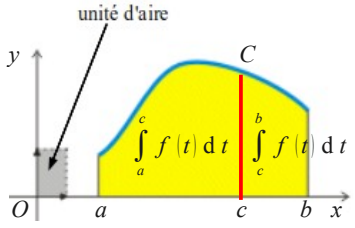
Par définition de la fonction logarithme, on obtient pour tout $x>0$, $\ln x=\int_1^x \frac{\mathrm{d}\,t}{t}$

4) RELATION DE CHASLES

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a\,;b]$. Pour tout réel $c\in[a\,;b]$, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t=\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}\,t+\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}\,t$$



Si f est positive, la relation de Chasles traduit l'additivité des aires.

Remarque :

Pour tous réels a et b , on a : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t+\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}\,t=\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}\,t=0$

On en déduit que :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t=-\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}\,t$$

5) LINÉARITÉ DE L'INTÉGRATION

Propriétés :

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a\,;b]$ et λ un réel . On a :

- $\int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
- $\int_a^b (\lambda f)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Exemple :

$$\int_e^3 3x+\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_e^3 3x\,\mathrm{d}x + \int_e^3 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 3\int_e^3 x\,\mathrm{d}x + \int_e^3 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_e^3 + [\ln x]_e^3 = 3\left(\frac{9}{2}-\frac{e^2}{2}\right)+\ln 3 - 1 = \frac{25}{2} - 3\,\frac{e^2}{2} + \ln 3$$

Avec Xcas, on saisit « simplifier(int(3*x+1/x,x,e,3)) »
Ce qui donne (-3*exp(1)^2+ln(9)+25)/2

6) POSITIVITÉ - ORDRE

Propriétés :

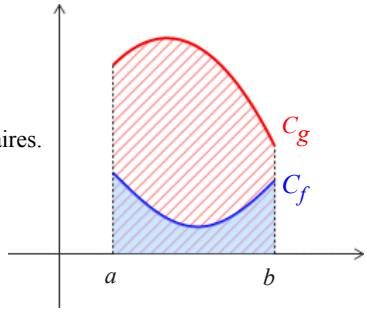
Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a\,;b]$:

- si pour tout x de $[a\,;b]$ on a $f(x)\geqslant 0$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$
- si pour tout x de $[a\,;b]$ on a $f(x)\leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

On traduit la deuxième inégalité, en disant que si $a\leqslant b$ on peut intégrer l'inégalité $f\leqslant g$ sur $[a\,;b]$.

Remarque :

Si f et g sont positives, l'inégalité $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ s'interprète de façon immédiate avec les aires.

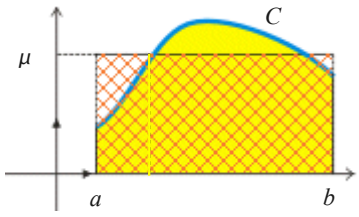


7) VALEUR MOYENNE

Définition :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a\,;b]$.

Le nombre $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est appelé **valeur moyenne** de f entre a et b.



Pour une fonction positive, la valeur moyenne μ correspond à la hauteur du rectangle de base $(b-a)$ dont l'aire est égale à l'aire définie par $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

8) INTEGRATION PAR PARTIES

Propriété

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , dont les dérivées u' et v' sont dérivables sur I.
Soit a et b deux éléments de I . On a :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)\,v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t$$

Cette formule vient directement de la formule :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Exemple : Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x \,\mathrm{d}\, x$

Posons $u(x)=x$ $\quad v'(x)=\cos x$
$u'(x)=1$ $\quad v(x)=\sin x$

Les fonctions u et v sont dérivables et leurs dérivées sont dérivables sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. On a alors :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x \,\mathrm{d}\, x=\left[x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \,\mathrm{d}\, x=\left[x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\left[x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$$

Avec Xcas, on saisit « int(x*cos(x),x,0,pi/2)» . On obtient 1/2*pi-1

Remarque :
Après avoir fait une intégration par parties, la nouvelle intégrale que l'on a à calculer doit être plus simple que la première . Si ce n'est pas le cas, il faut peut-être modifier le choix de u et v' . On pourra, si besoin est, utiliser plusieurs fois l'intégration par parties.

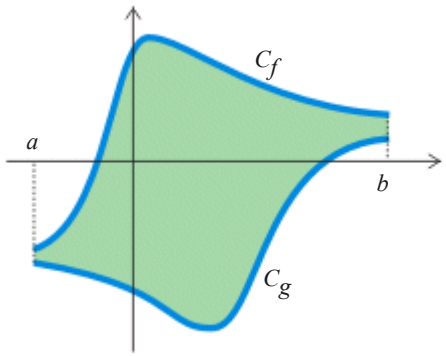
9) CALCULS D'AIRES

Propriété

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a\,;b]$ telles que, pour tout $x\in[a\,;b]$, $g(x)\leqslant f(x)$

L'aire du domaine limité par les courbes de f et de g et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$, c'est-à-dire l'ensemble des points $M(x\,;y)$ vérifiant $\begin{cases}a\leqslant x\leqslant b\\ g(x)\leqslant y\leqslant f(x)\end{cases}$,
est donnée en unités d'aires par :

$$\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$$



Remarque : Si f ou g est la fonction nulle, on retrouve les interprétations graphiques vues pour les fonctions positives et négatives.